A. FUENTES

LE BÉTON ARMÉ PRÉCONTRAINT

état de service
état limite ultime, ductilité
mécanisme de rupture des structures hyperstatiques

EYROLLES

EN VENTE AUX ÉDITIONS EYROLLES

Du même auteur :

LACROIX-A. FUENTÈS, *Le projet de béton précontraint* (coll. E.N.P.C.) (1977).

A. FUENTÈS, *Béton armé-Calcul des ossatures : Torsion. Flambement. Oscillations. Déformations plastiques* (1978).

« La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40 ».

« Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal ».

© ÉDITIONS EYROLLES, 1980

LE BÉTON ARMÉ APRÈS FISSURATION

état de service
état limite ultime, ductilité
mécanisme de rupture
des structures hyperstatiques

par

ALBERT FUENTÈS

Professeur
à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

EYROLLES

61, boulevard Saint-Germain - 75005 PARIS

1980

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS V

CHAPITRE PREMIER - Flexion 1

A) *Généralités* 1

Loi contrainte déformation du béton
Diagramme moment-courbure d'une poutre isostatique soumise à une charge croissante 1

B) *Calcul des déformations à l'état de service* 6

1. Méthode proposée par le B.A.E.L. 7
2. Méthode proposée par A.C.I. 8
3. Méthode graphique 9

a) section rectangulaire - b) section en T à large table peu épaisse c) déformation d'une poutre isostatique à armatures filantes - d) déformation d'une travée intermédiaire d'une poutre continue - e) déformation d'une poutre de section constante sollicitée par un couple à chaque extrêmité et d'une poutre à inertie. variable - f) méthode pratique de détermination des armatures tendues à l'état limite d'utilisation - g) exemple de calcul de flèche à l'état limite d'utilisation - h) principes à respecter pour le calcul du Béton Armé à l'état de service.

C) *La fissuration* 21

1. Ouverture des fissures 21
2. Allongement de l'acier selon le B.A.E.L. 22
3. Méthode de la CEMENT AND CONCRETE ASSOCIATION 23

D) *La redistribution des sollicitations dans les structures hyperstatiques jusqu'à l'état limite ultime* 24

1. Poutre de section constante, encastrée à ses deux extrêmités 25
2. Exemple d'une poutre continue à deux travées 29
3. Poutre à goussets 32
4. Effet de l'effort normal au droit d'un nœud de portique 33
5. Dénivellation d'appui et autres effets secondaires 33
6. L'effort tranchant et l'effet d'arc 33

E) *Méthode de l'Équilibre ultime* 34

Définition 34
Détermination des charges de rupture dans un :
1. Portique encastré soumis à des charges horizontales et verticales : Exemple A 36
2. Poutre continue uniformément chargée : Exemple B 39
3. Portique étagé : Exemple C .....

a) sous charges horizontales - b) sous charges verticales c) sous charges combinées.

4. Refend à file d'ouverture : Exemple D 47

5. Système à poutres croisées : Exemple E 48
6. Contreventement par remplissage en maçonnerie 50
7. Dalle rectangulaire articulée sur 4 appuis simples rigides 52
8. Plaque rectangulaire continue au-delà de ses 4 appuis 54
9. Excentrement des charges verticales dans un portique soumis à des charges verticales et horizontales : possibilité de flambement à l'état limite ultime 57
10. Actions cycliques 59
11. Conclusion 61

ANNEXE I - Méthode de l'A.C.I., pour le calcul du fluage 65

ANNEXE II - Méthode de l'A.C.I., pour le calcul du retrait 67

CHAPITRE II - L'effort tranchant 69

A) *État de service* 69

Définitions des armatures transversales dans une pièce en B.A. 69
1. Rappel de résistances des matériaux 69
a) matériau homogène - b) cas du béton armé.
2. Analogie d'une poutre en Béton Armé et d'une poutre en treillis 73
3. Influence de la fissuration d'effort tranchant sur la flexion 75
4. Rôle de la bielle d'appui 81
5. Charges appliquées en voisinage des appuis 84
6. Application d'une charge concentrée - croissements de poutres 85
7. Liaison des membrures et de l'âme d'une poutre 87
8. Entraînement des armatures 90
9. Effet Résal 90
10. Déformation d'effort tranchant à l'état de service 91

B) *Essais jusqu'à rupture de poutres isostatiques soumises à l'effort tranchant et interprétation des résultats* 92

C) *Résistance des dalles et des poutres-dalles* 98

1. Définition 98
2. Dalles sans armatures transversales 99
3. Élancement des dalles reposant sur deux lignes d'appuis 101
4. Dispositions constructives pour dalles courantes 102
5. Poinçonnement des dalles 102

D) *Prescriptions réglementaires* 103

1. Règles CEB 103
a) Eléments sans armatures d'effort tranchant - b) Eléments avec armatures d'effort tranchant.
2. Le nouveau règlement Français (B.A.E.L.) 106

CHAPITRE III - Poutres-Cloisons 109

CHAPITRE IV - Consoles courtes 119

CHAPITRE PREMIER

FLEXION

A) GÉNÉRALITÉS

- *LOI CONTRAINTE DÉFORMATION DU BÉTON*
- *DIAGRAMME MOMENT-COURBURE D'UNE POUTRE ISOSTATIQUE SOUMISE À UNE CHARGE CROISSANTE*

Le béton armé est un matériau non homogène où l'on note, en particulier, une faible résistance à la traction et un bon comportement sous contrainte normale de compression.

Ces deux caractéristiques du matériau nous conduisent donc à négliger la résistance du béton dans les parties tendues car, à l'état de service, la contrainte de traction du béton est généralement dépassée *, et, à considérer simultanément le diagramme contrainte déformation du béton, (soumis à la compression simple) sur lequel on constate que (fig. I.1):

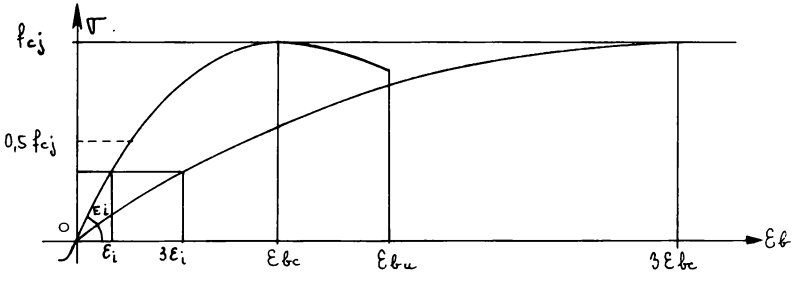


Fig. I.1.

(*) Lorsque le béton tendu se rompt, il y a report de l'effort de traction sur l'armature qui se met en tension en assurant le « relais »; si la section d'armature était insuffisante pour reprendre l'effort de traction il y aurait rupture fragile.

– *sous charge instantanée :*

L'allure du diagramme ne nous permet pas d'admettre une valeur constante du module d'élasticité au-delà de $0{,}5 f_{cj}$.

– *sous charge de longue durée :*

La déformation du béton tend à devenir en première approximation, trois fois plus importante que la déformation d'origine, ce qui correspond en conséquence, à un module d'élasticité $E_i/3$.

Considérons une poutre en béton armé de section constante, reposant sur deux appuis simples et soumise à une charge concentrée P croissante. Supposons que la poutre ne se rompe pas sous l'effet de l'effort tranchant.

1° Pour les petites valeurs de P, n'entraînant pas la fissuration du béton tendu (*), les différentes sections se comportent élastiquement; la rigidité en flexion est donnée par la relation :

$$B = E_b . I$$

où E_b est le module d'élasticité du béton et I le moment d'inertie de la section totale homogénéisée.

Dans cette *première étape* les déformations répondent sensiblement aux lois de la résistance des matériaux.

2° Lorsque les valeurs de P entraînent la fissuration du béton dans les sections les plus sollicitées, on peut encore considérer que la poutre se comporte élastiquement, mais il est difficile d'attribuer une valeur au facteur de rigidité B.

D'une part, le module E_b varie avec le temps (il y a lieu par conséquent de distinguer, dans P, la partie de charge permanente et la partie représentant la surcharge).

Quant au moment d'inertie, obtenu en homogénéisant la section (c'est-à-dire en négligeant le béton tendu, mais en tenant compte de la section d'armatures tendues) il est très approximatif, car :

a) le long de la poutre, toutes les sections ne sont pas fissurées, vers les appuis, en particulier, où le moment fléchissant tend vers zéro.

b) dans les parties fissurées, le béton compris entre deux fissures successives n'est pas pris en compte, et, la profondeur des fissures, varie d'une section à l'autre.

c) le coefficient d'équivalence acier-béton $n = E_a/E_b$ est considéré le plus souvent avec une valeur unique alors que sa valeur varie avec E_b (n vaut de 15 à 18 pour toutes les actions permanentes et de 5 à 6 pour toutes les actions instantanées).

d) l'armature n'a pas la même section tout le long de la poutre.

e) la table de compression mobilisée, dans une poutre en T, n'a pas la même largeur dans toutes les sections (ce fait est encore plus évident dans une poutre

(*) En raison de la plasticité en traction, la fissuration intervient lorsque la contrainte de traction, déduite de la formule Mv'/I est environ 1,5 fois plus grande que la contrainte de rupture par traction simple (phénomène constaté sur l'essai de rupture d'un prisme par flexion).

continue de plancher, car toute la table peut parfaitement être prise en compte au droit du moment positif maximum, alors que sur appui (au droit du moment négatif) où le parement inférieur de la retombée est comprimé, la section effective est simplement rectangulaire puisque le hourdis, formant la table de compression en travée, se situe dans la zone tendue.

La remarque *c*) montre l'erreur qui peut être faite dans la justification de la contrainte de compression d'une section fortement armée où le coefficient d'équivalence n est pris avec une valeur unique pour toutes sortes d'actions.

Les remarques *a*), *b*), *c*), *d*), *e*) montrent qu'une poutre en béton armé, de section constante, n'a pas une inertie constante sur toute sa longueur et si l'on ajoute la variation de E_b dans le temps, on s'aperçoit qu'il serait illusoire de déterminer la courbure de la poutre en écrivant :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Dans cette *deuxième étape*, la rigidité EI chute considérablement au fur et à mesure de l'apparition des fissures, ou au droit d'une reprise de bétonnage.

Le diagramme moment courbure de ces deux premières étapes peut être établi, pour des actions instantanées, sous la forme suivante : (fig. I.2) :

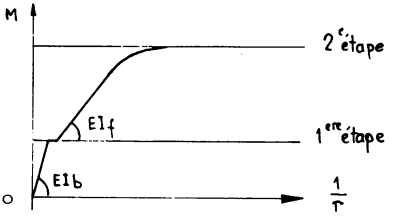


Fig. I.2.

Dans la *deuxième étape*, on pourra considérer deux phases principales déduites de la loi contrainte-déformation instantanée du béton qui, sous une forme simplifiée, est généralement représentée par le diagramme ci-dessous (fig. I.3).

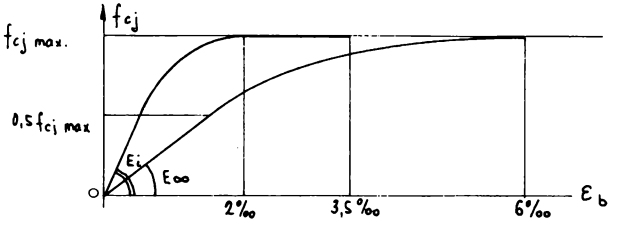


Fig. I.3.

– La première phase correspond à une contrainte du béton voisine de $0{,}5 f_{cj}$ pour laquelle la valeur du module E_i peut aisément être déterminée sous la forme :

$$E_i = 55\,700 \cdot f_{cj}^{1/3}(\text{bars})$$

ou (B.A.E.L.)*

$$E_i = 12\,000 \cdot f_{cj}^{1/3}(\text{MPa})$$

Au cours de cette phase, on observe uniquement la variation de I indiquée plus haut.

– La deuxième phase correspond à une contrainte du béton supérieure à $0{,}5 f_{cj}$; au cours de cette phase il y a non seulement une difficulté dans la détermination de I mais également dans la détermination de E qui varie considérablement puisque :

Le diagramme contrainte-déformation correspond à une ligne sensiblement parabolique.

On pourra admettre que la fin de la deuxième étape correspond à un raccourcissement du béton de 2 $^{0}/_{00}$, c'est-à-dire, lorsque le béton est sollicité à sa valeur maximale f_{cj}.

3° Si la valeur de P augmente encore, le béton comprimé de la section la plus sollicité se plastifie, la contrainte f_{cj} n'augmente pas mais le raccourcissement du béton continue à augmenter jusqu'à atteindre une valeur limite (prise généralement égale à 3,5 $^{0}/_{00}$ sous action instantanée), c'est la *troisième étape* de la vie de la poutre.

Au cours de cette étape, où f_{cj} ne varie plus, la section considérée équilibre encore un moment fléchissant mais la plastification du béton est telle que les déformations deviennent très importantes.

La section a atteint son moment de rupture M_r et on dira qu'il y a formation d'une rotule plastique (différente d'une articulation car cette section équilibre encore le moment de flexion M_r)*.

Au déchargement, la poutre présente une courbure permanente, la section considérée est une section fragile vis-à-vis des chargements répétés et surtout alternés.

Au-delà du chargement créant la rotule plastique, avec raccourcissement maximal du béton, la poutre se rompt.

Les trois étapes peuvent ainsi être représentées sur un diagramme moment-courbure trilinéaire (fig. I.4).

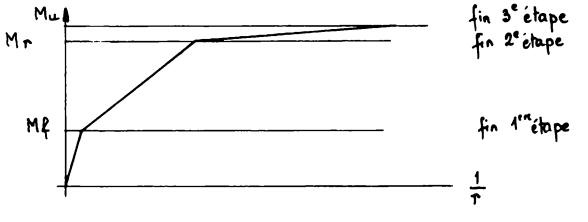


Fig. I.4.

(*) Le B.A.E.L. est le nouveau règlement français de calcul du béton armé aux états-limites.

(*) Nous verrons ultérieurement que la rotule plastique peut être envisagée également par limitation de l'allongement de l'acier tendu.

On note ici la faible amplitude de la 3e étape correspondant au passage du raccourcissement du béton de $2\,^{o}/_{oo}$ à $3{,}5\,^{o}/_{oo}$ sans que la contrainte f_{cj} ait augmenté.

Dans le cas même où l'allongement de l'armature correspond au maximum de l'effort pouvant être pris en compte dans la membrure tendue ($\varepsilon_a = 10\,^{o}/_{oo}$ par exemple, ou bien s'il s'agit d'un acier naturel dont le diagramme contrainte-déformation présente un palier entre la limite élastique et la contrainte de rupture) le moment de flexion augmente tout de même légèrement par suite de l'augmentation du bras de levier dans la section de hauteur utile d et de largeur b.

– Avec $\varepsilon_b = 2\,^{o}/_{oo}$ le diagramme contrainte-déformation du béton est pratiquement parabolique (fig. I.5)

$$F_a = F_b = 0{,}66 f_c \,.\, b \,.\, x_2 \qquad x_2 = \frac{F_a}{0{,}66\,.\,b.f_c}$$

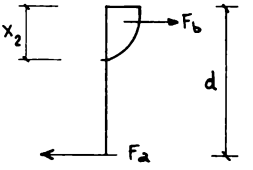


Fig. I.5.

le centre de gravité de la zone comprimée se situe à 3/8 du parement supérieur de la section,

d'où $$Z_2 = d - \frac{3}{8}\frac{F_a}{0{,}66\,.\,b\,.\,f_c} = d - \frac{0{,}57F_a}{b\,.\,f_c}$$

– Avec $\varepsilon_b = 3{,}5\,^{o}/_{oo}$, le diagramme contrainte-déformation du béton est une parabole rectangle (fig. I.6)

$$F_a = F_b = 0{,}8 f_c \,.\, b \,.\, x_{3,5} \qquad x_{3,5} = \frac{F_a}{0{,}8.b.f_c}$$

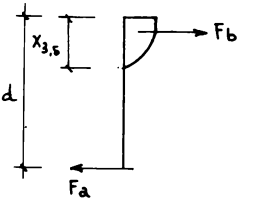


Fig. I.6.

le centre de gravité de la zone comprimée se situe à $0{,}4x_{3,5}$ du parement supérieur de la section, d'où

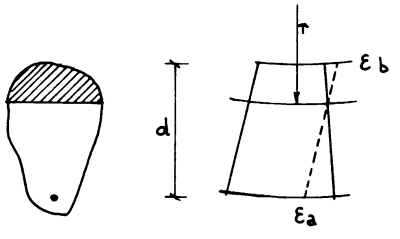
$$Z_{3,5} = d - 0{,}4\frac{F_a}{0{,}8\,.\,b\,.\,f_c} = d - \frac{0{,}5F_a}{b\,.\,f_c} > Z_2$$

B) CALCUL DES DÉFORMATIONS A L'ÉTAT DE SERVICE

1re étape – Avant fissuration du béton, le calcul peut être mené selon les règles de la Résistance des Matériaux, car on se trouve dans un domaine parfaitement élastique; le module d'élasticité E est bien connu (si $\sigma < 0{,}5 f_{cj}$ et si on distingue les actions instantanées des actions permanentes), on peut donc calculer le moment d'inertie en tenant compte de la section totale de béton ainsi que des armatures avec le coefficient d'équivalence n correspondant à chaque type d'action.

2e étape – Les éléments en béton armé sont généralement dimensionnés pour aller au-delà de la fissuration de sorte que l'état de service d'un élément en béton armé se situe, dans la majorité des cas, à l'intérieur du domaine défini comme représentant la 2e étape de la vie de l'élément.

Le béton est fissuré et sa contrainte de compression atteint et peut même dépasser légèrement $0{,}5 f_{cj}$, c'est une étape où l'on peut considérer que l'élément reste dans le domaine élastique mais les déformations ne peuvent plus être appréciées en déterminant, comme pour l'étape précédente, la rigidité EI mais plutôt en utilisant par exemple le calcul de la courbure dans les différentes sections et en intégrant ces courbures sur la longueur de l'élément considéré (fig. I.7)



$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b}{d}$$

Fig. I.7.

ε_a et ε_b sont respectivement l'allongement de l'acier et le raccourcissement du béton sur la fibre la plus comprimée, dans la section de hauteur utile d.

Dans la recherche de ε_b il est bien évident qu'on devra distinguer le module d'élasticité E applicable aux actions instantanées de celui utilisé pour les actions permanentes.

Dans cette étape qui correspond à l'état de service de l'élément, on peut admettre avec le B.A.E.L.:

– le fonctionnement élastique de la pièce ($\sigma \leqslant 0{,}5 f_{cj}$ pour le béton comprimé et $\sigma_a < \sigma_e$ pour les armatures tendues);

– la conservation des sections planes ;

– le non glissement relatif entre les armatures et le béton en dehors du voisinage immédiat des fissures (ce qui permet l'utilisation d'un coefficient d'équivalence pour tenir compte des armatures);

– une légère réduction d'allongement de l'armature tendue pour ne pas négliger l'intervention du béton tendu compris entre deux fissures, même quand la fissuration devient « systématique » (c'est là, la seule intervention du béton tendu).

En admettant même les simplifications ci-dessus, le calcul des déformations de l'élément reste aléatoire car il faut noter que le retrait et le fluage du béton ont tendance à augmenter la hauteur de la zone comprimée du béton, entraînant ainsi une réduction de la contrainte de compression sur la fibre extrême et une légère augmentation de la contrainte de traction de l'acier.

Par ailleurs, si les déformations dues à l'effort tranchant sont en général négligeables par rapport à celles qui sont dues au moment fléchissant, il faut par contre signaler l'influence de l'effet d'arc dans un élément fléchi; cet effet dépend beaucoup des conditions d'appui aux extrémités (reprise des poussées de l'arc), et peut considérablement augmenter la capacité portante de la pièce par suite de l'effort normal ainsi créé.

Notons enfin que dans une même pièce il faut distinguer des zones où la faiblesse du moment fléchissant ne permet pas de considérer que les sections sont fissurées (abouts d'une poutre isostatique sur deux appuis, soumise à une charge uniformément répartie par exemple) et des zones où la fissuration est systématique (partie centrale de la poutre isostatique ci-dessous) (fig. I.8).

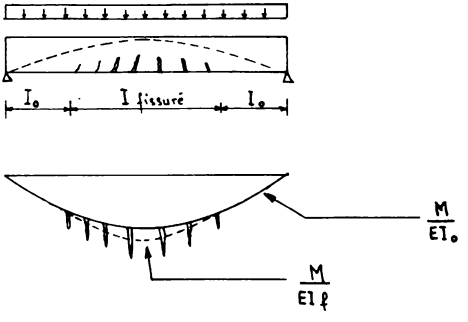


Fig. I.8.

1. Méthode proposée par le B.A.E.L.

Le B.A.E.L. propose un calcul de la courbure, dans les éléments fissurés, passant par la détermination d'un moment d'inertie fictif de la section; les formules empiriques proposées résultent de mesures de flèches, au cours d'essais, généralement sous chargement instantané :

I_f est défini par la relation $I_f = \dfrac{I_0}{1 + \lambda\mu}$ avec :

$$\lambda = \lambda_i = \frac{0{,}05 f_{t28}}{\left(2 + 3\frac{b_0}{b}\right)\rho}$$ pour les déformations instantanées;

$$\lambda = \lambda_v = \frac{2}{5}\lambda_i$$ pour les déformations de longue durée;

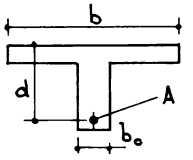
$$\mu = 1 - \frac{1{,}75 f_{t28}}{4\rho \cdot \sigma_a + f_{t28}}$$ (on adopte $\mu = 0$ si l'expression de μ est négative).

I_0 désigne le moment d'inertie de la section totale homogénéisée avec $n = 15$

f_{t28} la résistance caractéristique du béton à la traction exprimée en MPa (ou N/mm²)

σ_a la contrainte de traction effective de l'armature correspondant au cas de chargement considéré

ρ le « pourcentage » ou rapport de l'aire A de la section de l'armature tendue à l'aire de la section utile de la nervure (fig. I.9)



$$\rho = \frac{A}{b_0 \cdot d}$$

Fig. I.9.

En appelant M le moment fléchissant qui sollicite la section considérée, dans l'état d'utilisation envisagée, on écrira :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{M}{E_i . I_{f_i}} \text{ et } \frac{1}{r_v} = \frac{M}{E_v . I_{fv}} \text{ avec } E_v = \frac{1}{3} . E_i .$$

2. Méthode proposée par l'A.C.I.

L'American Concrete Institute (A.C.I.) propose les formules empiriques suivantes :

- pour les poteaux $EI = (0{,}2E_b . I_b + E_a . I_a) . \frac{1}{1+\beta}$
- pour les poutres $EI = E_b I_b \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] . E_i I_{cr}$

I_b est le moment d'inertie de la section totale de béton (sans tenir compte des armatures) dont le module d'élasticité instantané est E_i

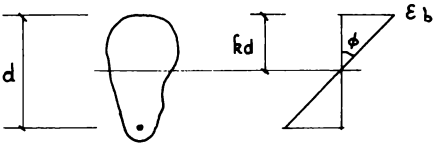
E_a est le module d'élasticité de l'acier

I_a est le moment d'inertie des armatures pris par rapport à l'axe neutre de la section totale de béton

β est un coefficient dépendant du fluage et égal au rapport de la charge permanente à la charge totale (compris entre 0 et 1)

I_{cr} est le moment d'inertie de la section de béton fissurée (fig. I.10) telle que :

Fig. I.10.



$$\frac{M_a}{E_i \cdot I_{cr}} = \varphi = \frac{\varepsilon_b}{kd} \quad \text{ou} \quad I_{cr} = \frac{M_a \cdot kd}{E_i \varepsilon_b} = \frac{M_a \cdot kd}{\sigma_b}$$

M_a est le moment de flexion maximal sollicitant la section au moment de la vérification.

On note en outre

$$M_{cr} = \frac{f_t \cdot I_b}{V'}$$

f_t est la contrainte de rupture en traction

M_{cr} le moment de flexion qui correspond à l'apparition des premières fissures.

V' la distance de l'axe neutre à la fibre la plus tendue.

3. Méthode graphique

A partir des hypothèses du B.A.E.L., généralement admises dans la plupart des règlements, nous proposerons ci-après, en ajoutant quelques hypothèses complémentaires, une méthode relativement simple de détermination de la courbure à l'état limite de service.

Nous supposons que la contrainte maximale sur la fibre la plus comprimée d'une section fléchie atteigne au maximum $0{,}5 f_{cj}$ de telle sorte que le module d'élasticité soit bien connu et que la zone comprimée réponde à l'égalité :

$$E\varepsilon_b = \sigma_b$$

Nous supposons en outre que la section satisfasse à toutes les conditions de vérification à l'état limite ultime et que le coefficient de sécurité moyen soit de l'ordre de 1,4 (1,35 sur les actions permanentes et 1,5 sur les actions rapidement variables)*; nous appelons M le moment de service au droit de la section considérée.

(*) Le coefficient 1,4 correspond ainsi à une charge permanente double de la charge d'exploitation. Le calcul pourrait être repris pour tout autre coefficient moyen.

a) *Section rectangulaire :*

A l'état limite ultime, la section cède par :

α) insuffisance du béton dont le raccourcissement atteint $3{,}5\ {}^{o}/_{oo}$ alors que l'allongement des armatures est $\leqslant 10{}^{o}/_{oo}$; s'il y a des armatures comprimées dans la section, elles sont soumises à une contrainte compatible avec le raccourcissement de $3{,}5\ {}^{o}/_{oo}$ compte tenu de leur position respective par rapport à la fibre la plus comprimée (avec $\gamma_s = 1{,}15$); les armatures tendues (fig. I.11) travaillent à $\sigma_e/1{,}15$ et le béton à $\dfrac{0{,}85}{1{,}5} f_{cj}$ (contraintes maximales conformes au B.A.E.L.).

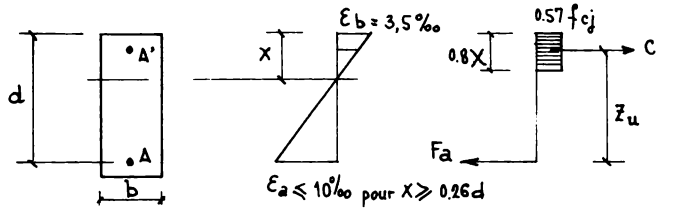


Fig. I.11.

On a

$$F_a = \frac{\sigma_e}{1{,}15} . A \qquad \text{et} \qquad C = 0{,}8bx . \frac{0{,}85}{1{,}5} f_{cj} = 0{,}45bx . f_{cj}$$

on obtient x en écrivant $C = F_a$.

On doit avoir

$$\frac{A . \sigma_e}{1{,}15} . Z_u = 1{,}4M \qquad \text{avec} \qquad Z_u = d - 0{,}4x$$

A l'état de service les diagrammes de contraintes et de déformations correspondent à (fig. I.12)

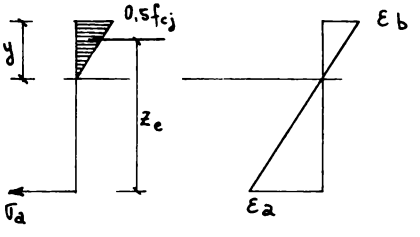


Fig. I.12.

on a $$A\sigma_a . Z_e = M = \frac{A\sigma_e . Z_u}{1{,}6} \qquad \text{soit} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_e}{1{,}6} . \frac{Z_u}{Z_e}$$

et $$(0{,}45bx . f_{cj}) Z_u = \left(1{,}4by . \frac{0{,}5}{2} f_{cj}\right) Z_e$$

ou $$0{,}45bx . Z_u = 0{,}35byZ_e \qquad \text{soit} \qquad y \simeq 1{,}3x . \frac{Z_u}{Z_e}$$

on obtient Z_e en écrivant

$$Z_e = d - \frac{y}{3}$$

d'où la valeur de σ_a et par suite de ε_a.

β) Si la section cède par insuffisance d'armature tendue qui atteint un allongement de $10\,{}^{0}/_{00}$ alors que le béton a un raccourcissement de $2\,{}^{0}/_{00}$, on obtient à l'état limite ultime :

$$F_a = \frac{\sigma_e}{1{,}15} . A \qquad \text{et} \qquad C = \frac{0{,}85}{1{,}5} f_{cj} . 0{,}66bx = 0{,}37bx . f_{cj}$$

on détermine x en écrivant $C = F_a$ d'où Z_u.

Comme dans le cas précédent, l'état de service correspond à :

$$A . \sigma_a . Z_e = M = \frac{A . \sigma_e . Z_u}{1{,}6} \qquad \text{soit} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_e}{1{,}6} . \frac{Z_u}{Z_e}$$

et

$$Z_u(0{,}37bx . f_{cj}) = Z_e\left(1{,}4by . \frac{0{,}5}{2} f_{cj}\right)$$

$$Z_u . 0{,}37bx = 0{,}35byZ_e \qquad \text{soit} \qquad y \simeq 1{,}06x . \frac{Z_u}{Z_e}$$

on obtient encore Z_e en écrivant

$$Z_e = d - \frac{y}{3}$$

d'où σ_a et ε_a.

On s'aperçoit que $Z_u \simeq Z_e$ lorsque, à l'état limite ultime, $x < 0{,}26d$ pour $\varepsilon_b = 3{,}5\,{}^{0}/_{00}$, ce qui conduit à $\varepsilon_a > 10\,{}^{0}/_{00}$; on doit alors bloquer l'allongement de l'acier à $10\,{}^{0}/_{00}$ et augmenter x, on obtient généralement (fig. I.13) pour $\varepsilon_a = 10\,{}^{0}/_{00}$ et $x > 0{,}26d$

$$1\,{}^{0}/_{00} < \varepsilon_b \leqslant 1{,}5\,{}^{0}/_{00} \text{ et } Z_u \simeq Z_e.$$

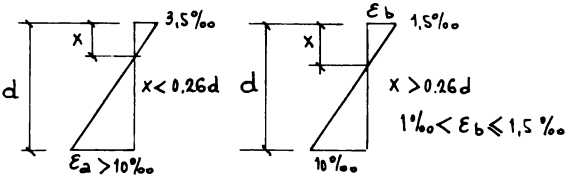


Fig. I.13.

C'est le cas des sections rectangulaires très larges ou des poutres en T à table de compression épaisse où l'axe neutre se situe dans l'épaisseur de la table.

On se limite alors à l'état de service à $\frac{\sigma_e}{1{,}6} < \sigma_a \leqslant \frac{\sigma_e}{1{,}5}$.

b) *Section en T à large table peu épaisse :*

Dans ce cas, la section cède par insuffisance de l'acier qui atteint l'allongement de $10\,{}^{o}/_{oo}$ alors que le béton n'atteint qu'un raccourcissement de compatibilité de l'ordre de 1 à $1{,}5\,{}^{o}/_{oo}$.

En effet dans le cas de telles poutres on s'aperçoit que si l'on adopte un raccourcissement de $3{,}5\,{}^{o}/_{oo}$ (ou même $2\,{}^{o}/_{oo}$) pour le béton, la valeur de x est tellement basse qu'avec l'hypothèse de la conservation des sections planes, l'allongement de l'acier devrait être supérieur à $10\,{}^{o}/_{oo}$ (fig. I.14).

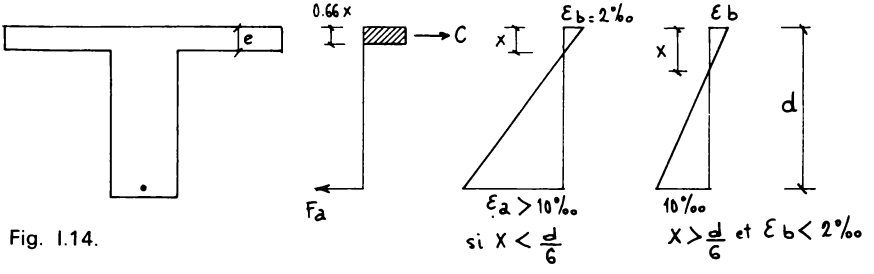


Fig. I.14.

On a généralement dans ce cas

$$Z_u \simeq d - \frac{e}{3} \qquad \text{et} \qquad Z_e \simeq d - \frac{e}{2}$$

avec $$A \frac{\sigma_e}{1{,}15} . Z_u = 1{,}4 \sigma_a . A . Z_e \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_e}{1.6} . \frac{Z_u}{Z_e}$$

on pourra admettre $\sigma_a = \dfrac{\sigma_e}{1{,}5}$.

A partir de la vérification à l'état limite ultime, nous venons de définir la valeur maximale de σ_a dans une section fissurée en supposant que la contrainte maximale sur la fibre la plus comprimée de la section atteigne $0{,}5 f_{cj}$. Nous calculerons l'allongement moyen de l'armature tendue en tenant compte du béton de la zone tendue compris entre deux fissures.

$$\varepsilon_{am} = \frac{\sigma_a}{E_a} - \frac{f_{tj}}{2E_a . \rho_f} \qquad \text{à condition que} \qquad \rho_f \geqslant \frac{f_{tj}}{\sigma_a}$$

f_{tj} est la contrainte de rupture par traction du béton à j jours

ρ_f le rapport de la section d'armatures tendues à une aire de béton tendu limitée par le contour de la pièce et une parallèle à l'axe neutre déterminée par celle des deux conditions suivantes qui donne la plus grande surface :

– la hauteur du béton tendu comptée à partir de la fibre extrême, est égale à $0{,}3d$ (d est la hauteur utile)

– l'aire de béton tendu a même centre de gravité que les armatures tendues.

Nous avons maintenant tous les éléments permettant de calculer la courbure de la pièce au droit du moment maximal M_i dû à toutes les actions de courte durée

$$\frac{M_i}{EI} = \frac{1}{r_i} = \frac{\varepsilon_{ami} + \varepsilon_{bi}}{d} \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_{bi} = \frac{0{,}5 f_{cj}}{E_i} . k \qquad \text{et} \quad \varepsilon_{ami} = \varepsilon_{am} . k$$

et au droit du moment maximal M_v dû à toutes les actions de longue durée

$$\frac{M_v}{EI} = \frac{1}{r_v} = \frac{\varepsilon_{amv} + \varepsilon_{bv}}{d} \qquad \varepsilon_{bv} = \frac{3 . 0{,}5 f_{cj}}{E_i} (1 - k) \qquad \varepsilon_{amv} = \varepsilon_{am}(1 - k)$$

Le coefficient k permet d'exprimer la charge de courte durée comme une partie de la charge totale ($P = G + Q$), soit

$$P = G + kP$$

En fonction de l'élément à étudier il suffit maintenant de distinguer les zones fissurées de celles qui ne le sont pas; le moment de fissuration M_f est tel qu'à partir de la section totale de béton homogénéisée, d'inertie I_0 :

$$\frac{M_f . v'}{I_0} = 1{,}5 f_{tj}$$

c) déformation d'une poutre isostatique uniformément chargée à armatures filantes (fig. I.15)

Moments de flexion

$$M_m = M_i + M_v$$

Courbures sous charge totale

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{am} + \varepsilon_b}{d}$$

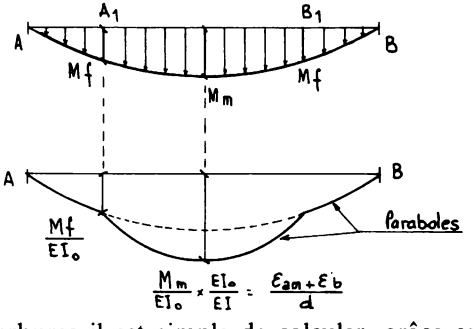


Fig. I.15.

A partir du diagramme des courbures il est simple de calculer, grâce au théorème de Mohr, soit les rotations, soit les flèches et de dégager une rigidité moyenne de la poutre en traçant une parabole moyenne de longueur AB dont l'aire est égale à celle du diagramme des courbures sous charge totale; la flèche de la parabole sera :

$$f = \frac{M_m}{EI_f} \qquad \text{où} \qquad EI_f \text{ est la rigidité moyenne de la poutre.}$$

NOTA : Si les armatures tendues ne sont pas filantes sur toute la longueur de la poutre, il y a lieu de calculer la courbure sur des sections intermédiaires situées entre A_1 et B_1.

d) déformation d'une travée intermédiaire d'une poutre continue (fig. I.16)

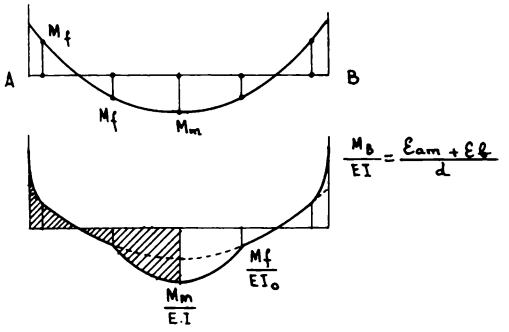


Fig. I.16.

e) déformation d'une poutre de section constante sollicitée par un couple à chaque extrémité (fig. I.17).

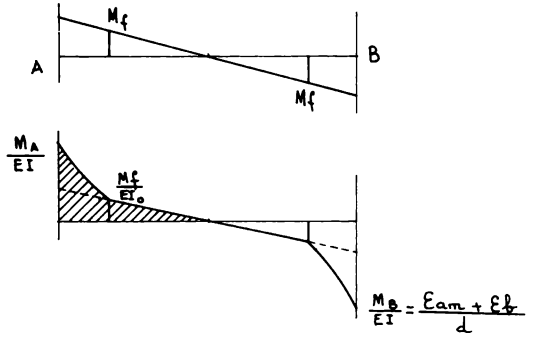
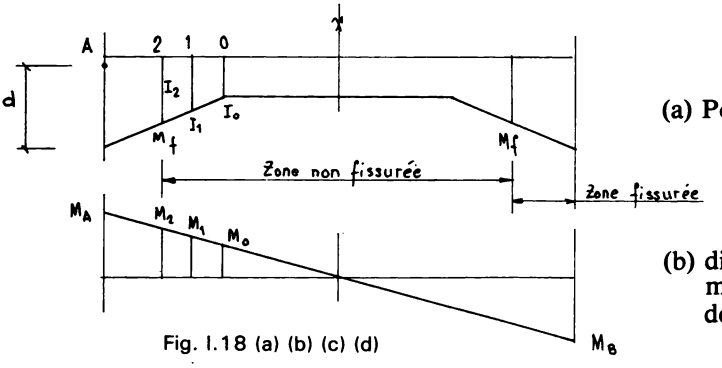


Fig. I.17.

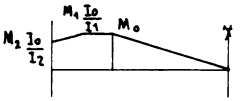
N.B.: Tout élément de béton armé normalement dimensionné, étant un élément à inertie variable, on pourra opérer pour les éléments dont la section totale de béton est d'inertie variable comme pour ceux où la section totale de béton est d'inertie constante (sauf dans les zones non fissurées à inertie variable fig. I.18)



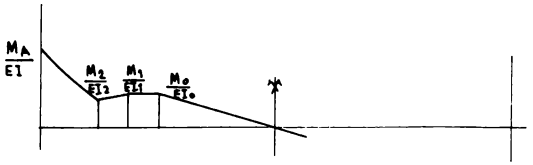
(a) Poutre à goussets

(b) diagramme des moments de flexion

Fig. I.18 (a) (b) (c) (d)



(c) moments rectifiés (zone non fissurée)



(d) diagramme des courbures

Courbure en A : $\frac{M_A}{EI} = \frac{\varepsilon_{am} + \varepsilon_b}{d}$ (zone fissurée)

Le calcul de points intermédiaires entre les sections A et 2 permettrait d'obtenir une meilleure approximation de la rigidité moyenne de cette poutre à inertie variable.

f) *Méthode pratique de détermination des armatures tendues à l'état limite d'utilisation*

Les valeurs moyennes à retenir pour $Z_e = k'd$ (bras de levier du couple élastique) sont, pour des sections rectangulaires ou en T, fonction du rapport $\frac{A'}{A}$ de la section d'armature comprimée à l'armature tendue.

Le tableau ci-après donne les différentes valeurs des coefficients à appliquer à la hauteur utile pour le calcul de Z_e.

$\rho = \frac{A'}{A}$	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Section rectangulaire	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87
Section en I ou T	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88

La valeur de σ_a restera au maximum de l'ordre de :

$$\sigma_a \simeq \frac{\sigma_e}{1{,}5} \quad \text{dans tous les cas.}$$

Sur la fibre la plus comprimée σ_b devra rester voisin de :

$$\sigma_b \leqslant 0{,}5 f_{cj}$$

NOTA : Le tableau ci-dessus indique des coefficients minorés pour tenir compte dans une certaine mesure des effets du retrait et du fluage qui ont tendance à augmenter légèrement la hauteur de zone comprimée.

g) ***Exemple de calcul de flèche à l'état limite d'utilisation***

Une poutre isostatique de section rectangulaire 22 × 40 supporte une charge d'exploitation de 1 t p.m.l. en plus de la charge permanente qui, avec le poids propre, correspond à 1,8 t p.m.l.; sa portée est de 4,00 m.

On demande de calculer sa courbure dans la partie centrale à l'état de service, compte tenu d'une section d'armatures filantes et tendues, répondant à la combinaison de l'état ultime $(1{,}35G + 1{,}5Q)$.

On adopte $f_{c28} = 25$ MPa et $\sigma_e = 420$ MPa.

Le moment fléchissant de service vaut $\dfrac{2\,800 \,.\, \overline{4}^2}{8} = 5\,600$ kg.m

Avec $\dfrac{A'}{A} = 0{,}2$, on adopte $Z_e = 0 \,.\, 83 \,.\, 37 = 31$ cm et $\sigma_a = \dfrac{\sigma_e}{1{,}5}$

$$A = \frac{560\,000}{2\,800 \,.\, 31} = 6{,}45 \text{ cm}^2 \quad (1 \text{ Tor } 20 + 2 \text{ Tor } 16 = 7{,}14 \text{ cm}^2)$$

Nous disposerons 2 Tor 10 filants à la partie supérieure

$$A' = 1{,}57 \text{ cm}^2.$$

Le moment fléchissant correspondant à l'état limite ultime s'écrit :

$$(1{,}35 \times 1{,}8) + (1{,}50 \times 1) \times \frac{\overline{4}^2}{8} = 7\,860 \text{ kg/m}.$$

Nous supposons que la section cède par le béton atteignant un raccourcissement de $3{,}5\ ^{o}/_{oo}$ c'est-à-dire la contrainte maximale

$$0{,}85 \times \frac{250}{1{,}5} = 141{,}6 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{avec} \qquad \frac{\sigma_e}{1{,}15} = 3\,652 \text{ kg/cm}^2$$

on a $$F_a = 7{,}14 \times 3\,652 = 26\,075 \text{ kg},$$

ce qui nous permet de calculer x, à partir de :

$$(3\,652 \times 1{,}57) + (0{,}8x \times 22 \times 141{,}6) = 26\,075$$

soit $x = 8{,}16 < 0{,}26d$ (fig. I.19)

avec un raccourcissement de $2\ ^{o}/_{oo}$:

$$(3\,652 \times 1{,}57) + (0{,}66x \times 22 \times 141{,}6) = 26\,075$$

$$x = 9{,}89 \text{ cm}$$

$$x > \frac{d}{6}$$

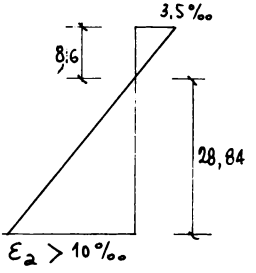


Fig. I.19.

$$Z_u = 37 - \frac{3}{8} \times 9{,}89 = 33{,}3 \text{ cm}$$

$$M_u = 26\,075 \times 33{,}3 = 868\,297 \text{ kg.cm} \quad \text{ou} \quad 8\,682 \text{ kgm}$$

$$8682 > 7860 \text{ kg.m}$$

L'écart entre le moment requis et le moment résistant provient de la section d'armature tendue 7,14 cm² au lieu de 6,45 cm² (fig. I.21).

A l'état limite d'utilisation avec, $Z_e = 31$ cm, on a :

$$F = \frac{5\,600}{0{,}31} = 18\,064 \text{ kg}$$

Le coefficient d'équivalence $n = \frac{E_a}{E_b}$ est pris égal à 18 pour les charges permanentes et à 6 pour les charges variables, soit dans notre cas

$$n = \frac{1 \text{ x } 6 + 1{,}8 \text{ x } 18}{2{,}8} = 13{,}7$$

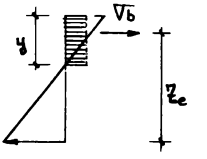


Fig. I.20.

avec $\sigma_b = 0{,}5 f_{c28} = 125$ kg/cm^2 la valeur de y est donnée par

$$(1{,}57 \times 13{,}7 + 22y)\frac{125}{2} = 18\,064 \text{ kg} \quad ; \quad y = 12{,}15 \text{ cm} \quad (\textit{fig. I.20})$$

soit $Z_e = 37 - 4{,}05$ d'où $32 < Z_e < 33$

– *sous charge permanente :*

$$M_G = \frac{1{,}8 \times \bar{4}^2}{8} = 3\,600 \text{ kgm}$$

$$\sigma_a = \frac{360\,000}{32 \times 7{,}14} = 1\,575 \text{ kg/cm}^2 \qquad \text{avec} \qquad Z_e = 32 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_a = \frac{1\,575}{2\,000\,000} = 0{,}78 \text{ }^{\circ}/_{\circ\circ}$$

ici $\begin{cases} f_{tj} = 6 + 15 = 21 \text{ kg/cm}^2 \\ \rho_f = \dfrac{7{,}14}{22 \times 11{,}1} = 2{,}92 \text{ } \% > \dfrac{f_{tj}}{\sigma_a} \end{cases}$

$$\varepsilon_{am} = 0{,}78 \text{ }^{\circ}/_{\circ\circ} - \frac{1.8}{2.8} \cdot \frac{2\,100}{2 \times 2.10^6 \times 2{,}92} = 0{,}66 \text{ }^{\circ}/_{\circ\circ}$$

et $\sigma_{bG} = 125 \times \frac{1{,}8}{2{,}8} = 80{,}35$ kg/cm^2 $\qquad \varepsilon_{bG} = \frac{80{,}35}{18\,600 \sqrt[3]{250}} = 0{,}68 \text{ }^{\circ}/_{\circ\circ}$

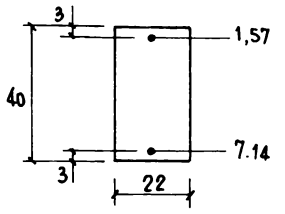
$$\frac{1}{r_v} = \frac{1{,}34}{37\,000} = \frac{M}{EI_{fv}}$$

$$I_{fv} = \frac{37\,000M}{1{,}34E} = 84\,956 \text{ cm}^4$$

Dans le cas de la section totale homogénéisée, avec $n = 18$, on a $I_t = 162\,300$ cm^4.

La courbure serait deux fois moins grande que dans l'état fissuré.

Fig. I.21.



La flèche sous charge permanente peut être obtenue en calculant le moment de fissuration

$$M_f \frac{v'}{I} = 1{,}5 \times 21 \qquad \text{soit} \qquad M_f = 2\,596 \text{ kgm}$$

puis en traçant le diagramme des déformations.

Après plusieurs applications de la charge d'utilisation, on peut considérer que la section n'a jamais été fissurée jusqu'à l'abscisse X déterminée à partir de l'appui par :

$$\frac{2{,}8\,X\,(4 - X)}{2} = 2\,596 \qquad \text{soit} \qquad X = \begin{matrix} 0{,}55 \text{ m} \\ 3{,}45 \text{ m} \end{matrix}$$

La figure ci-contre représente le diagramme des courbures dans le cas d'une armature filante. Sur la distance de 2,9 m d'autres points doivent être recherchés dans le cas où toutes les armatures ne filent pas jusqu'aux appuis (fig. I.22).

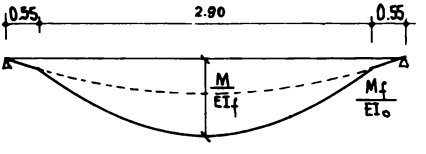


Fig. I.22.

– *sous charge d'exploitation :*

$$\begin{cases} \sigma_a = 875 \text{ kg/cm}^2 \\ \varepsilon_a = 0{,}44\ {}^{o}/_{oo} \\ \varepsilon_{am} = 0{,}37\ {}^{o}/_{oo} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \sigma_{bQ} = 125 \times \dfrac{1}{2{,}8} = 44{,}65 \text{ kg/cm}^2 \qquad E_i = 55\,700 \sqrt[3]{250} = 350\,000 \text{ kg/cm}^2 \\ \varepsilon_{bQ} = \dfrac{44{,}65}{55\,700 \sqrt[3]{250}} = 0{,}128\ {}^{o}/_{oo} \end{cases}$$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{0{,}5}{37\,000} = \frac{M}{EI_{fi}}$$

$$I_{fi} = \frac{37\,000}{0{,}5} \times \frac{M}{E} = 42\,285 \text{ cm}^4$$

alors que I_0, section totale homogénéisée avec $n = 6$ vaut

$$I_0 = 132\,300 \text{ cm}^4$$

La rigidité moyenne de cette poutre isostatique peut être obtenue directement avec un module d'élasticité moyen pour le béton donné par :

$$\frac{1}{E_m} = \frac{1{,}8}{2{,}8} \times \frac{1}{117\,000} + \frac{1}{2{,}8} \times \frac{1}{350\,000} = \frac{6{,}38}{980\,000}$$

soit :

$$E_m = 153\,605 \text{ kg/cm}^2$$
$$\sigma_a = 2\,450 \text{ kg/cm}^2$$
$$\varepsilon_a = 1{,}22\ {}^{0}/_{00}$$
$$\varepsilon_{am} = 1{,}03\ {}^{0}/_{00}$$
$$\varepsilon_b = \frac{125}{153\,605} = 0{,}81\ {}^{0}/_{00}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1{,}84}{1\,000 \times 37} = \frac{M}{EI}$$
$$EI = \frac{560\,000 \times 37\,000}{1{,}84} = 1\,126 \times 10^7 \text{ kg.cm}^2$$
$$I = 73307 \text{ cm}^4$$

or avec $n = 13{,}7 \qquad I_0 = 150\,000 \text{ cm}^4$

$$EI_0 = 153\,605 \times 150\,000 \simeq 2\,304 . 10^7 \text{ kg.cm}^2$$

et $$\frac{M_f}{EI_0} = \frac{259\,600}{2\,304 . 10^7} = \frac{0{,}416}{37\,000}$$

La parabole d'aire équivalente au diagramme ci-contre, a une flèche (représentant la courbure) (fig. I.23)

$$\frac{M}{EI_e} = \frac{1{,}577}{37\,000}$$

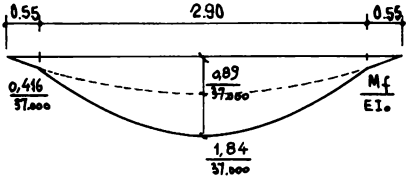


Fig. I.23.

d'où la rigidité moyenne de la poutre sous sollicitation de service :

$$EI_e = \frac{560\,000 \times 37\,000}{1{,}577} = 1\,314 \times 10^7 \text{ kg.cm}^2$$

avec : $$I_e = 85\,539 \text{ cm}^4$$

h) *Principes à respecter pour le calcul du béton armé à l'état de service*

La rigidité de flexion d'un élément fléchi décroît considérablement dès la fissuration des sections les plus sollicitées; nous avons vu en outre qu'il en était de même pour la rigidité de torsion (A.F. tome II); il est donc illusoire de penser

qu'une structure hyperstatique en béton armé, calculée suivant la théorie élastique de la Résistance des Matériaux présentera une déformation réelle, conforme aux résultats obtenus dans le calcul si les rigidités introduites correspondent aux sections totales des éléments qui composent cette structure. L'erreur provient notamment de la différence (de dimensions transversales et de sollicitations) qui existe entre les nombreux éléments d'une structure et de l'état plus ou moins fissuré de ces éléments, sous charges de service.

Il est bien clair qu'en écrivant la compatibilité de déformation, à l'angle d'un portique, composé d'un poteau fléchi, mais fortement comprimé, et d'une traverse simplement fléchie, dimensionnée suivant les règles habituelles du béton armé, on peut commettre une erreur importante en introduisant les inerties correspondant à la section transversale totale de chaque élément car, dans le poteau, la fissuration est très retardée (et peut même ne pas intervenir) grâce à l'importance de l'effort normal, alors que dans la traverse, cette fissuration est presque généralisée à l'état de service.

Par contre, dans les ouvrages précontraints de genre I ou II, l'hypothèse de l'intervention de la section transversale totale de chaque élément de la structure est parfaitement admissible puisque la fissuration ne doit pas intervenir à l'état de service.

Dans une structure hyperstatique en béton armé, il est nécessaire de procéder par itération :

– la répartition des moments se détermine selon la théorie élastique en faisant intervenir les sections de béton seul;

– on détermine les armatures et on calcule les nouvelles rigidités compte tenu des zones où les pièces sont fissurées;

– le procédé est répété jusqu'à ce qu'il y ait conformité entre la distribution des sollicitations et les rigidités déterminées sur la longueur de chaque élément (zones fissurées ou pas).

NOTA : Dans un portique étagé, soumis à des charges verticales et horizontales (vent), la superposition des moments fléchissants conduit

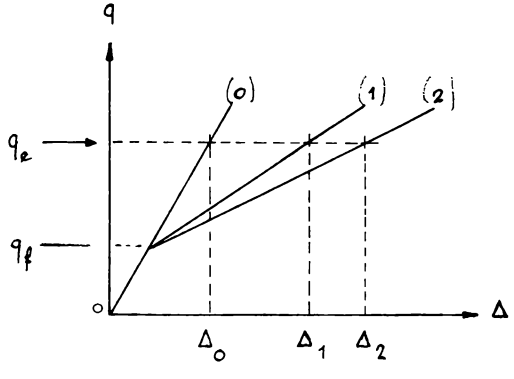


Fig. I.24. — Diagramme effort-déplacement sur un même niveau.

généralement à prévoir des armatures filantes dans les traverses, ainsi que dans les poteaux d'ailleurs puisqu'ils sont soumis à des efforts horizontaux réversibles et à des charges verticales souvent très importantes. De telles dispositions facilitent la recherche de la rigidité équivalente de chaque élément en utilisant les méthodes ci-dessus exposées et par conséquent le calcul des déplacements du portique après fissuration des traverses et des montants (fig. I.24).

On s'aperçoit, généralement, que sous des charges verticales importantes et malgré les moments fléchissants aux nœuds (dus aux efforts horizontaux et verticaux) les montants ne sont pas décomprimés alors que, les traverses peuvent être fissurées sur toute leur longueur (cas 1); ou bien qu'avec des charges verticales plus faibles on peut obtenir la fissuration des montants et des traverses (cas 2).

Le déplacement du portique, sous l'effort horizontal d'exploitation, est ainsi différent dans les deux cas ci-dessus par rapport à celui obtenu dans l'hypothèse de l'intégrité des sections des montants et traverses (cas 0).

C) LA FISSURATION

1. Ouverture des fissures

Comme nous venons de le voir, le calcul du béton armé ne tient pas compte de la résistance du béton en traction de sorte que, la contrainte de traction de l'armature est celle obtenue au droit d'une fissure; il est cependant évident que, grâce à l'intervention de l'adhérence, le béton de la zone tendue, comprise entre deux fissures, vient réduire la contrainte de traction de l'armature.

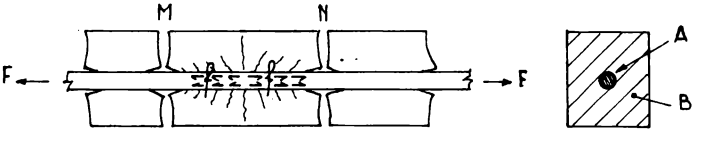


Fig. I.25.

En appelant τ_d la contrainte d'adhérence du béton et B la section du barreau contenant les armatures tendues de section A, la rupture par traction est obtenue dès qu'une force F est transmise au béton par l'intermédiaire des armatures; cette force est telle que :

$$F = B \,.\, \sigma_j$$

σ_j est la contrainte de rupture du béton par traction simple (elle correspond à f_{tj} dans le B.A.E.L.).

A partir de la première fissure (point M par exemple), la contrainte σ_a de l'armature se trouve réduite de la valeur (fig. I.25) :

$$f = \tau_d \,.\, p \,.\, dx \quad \text{(par unité de longueur } dx\text{)}$$

où p désigne le périmètre des m barres de diamètre d constituant l'armature :

on a ainsi $\quad p = m \,.\, \pi \,.\, d \qquad$ et $\qquad A = m \,.\, \pi \,.\, \dfrac{d^2}{4}$

Lorsque sur une distance Δl telle que :

$$\Delta l \,.\, \tau_d \,.\, p = B \,.\, \sigma_j$$

la contrainte mobilisée dans le béton correspond à la rupture du tirant, il y a une deuxième fissure qui se crée à la distance minimale :

$$\Delta l_{\min} = \frac{B \,.\, \sigma_j}{p \,.\, \tau_d} = \frac{d \,.\, \sigma_j}{4\tau_d \,.\, \varpi_f}$$

avec $\quad \omega_f = \dfrac{A}{B} \qquad$ soit $\qquad \dfrac{B}{p} = \dfrac{A}{\varpi_f \,.\, p} = \dfrac{d}{4\varpi_f}$

Pour déterminer $\Delta l_{\min}$ on a supposé que la contrainte d'adhérence était constante sur toute la longueur de l'armature.

Les paramètres permettant de définir τ_d sont :

– la résistance à la traction du béton σ_j; et par suite sa résistance au cisaillement,

– l'enrobage des armatures et leur disposition,

– les qualités d'adhérence, dues aux rugosités des barres, caractérisées par le coefficient η.

Les mesures expérimentales, réalisées en laboratoire, ont permis de préciser qu'avec :

$\eta = 1$ pour les ronds lisses

$\eta = 1{,}6$ pour les aciers crénelés ou torsadés

l'espacement moyen entre les fissures est de l'ordre de 1,8 fois l'espacement minimal $\Delta l_{\min}$

$$\Delta l_m = 1{,}8 \,.\, \Delta l_{\min}$$

La contrainte des armatures étant égale à σ_f au droit d'une fissure, les frottements qui engendrent l'adhérence ont pour conséquence de diminuer cette contrainte entre deux fissures voisines. Comme l'effort maximal qui peut être transmis au béton est égal à $B\sigma_j$, la diminution moyenne de l'effort transmis, entre deux fissures distantes de $\Delta l_{\min}$, est de $0{,}25B\sigma_j$.

Ainsi, pour l'intervalle moyen Δl_m on pourra considérer que la contrainte moyenne de l'acier est égale à :

$$\sigma_{fm} = \frac{1}{A}\,(A\sigma_f - 1{,}8 \times 0{,}25B \,.\, \sigma_j) = \sigma_f - \frac{0{,}45\sigma_j}{\varpi_f}$$

et que la largeur moyenne des fissures, mesurée au centre de gravité des armatures

tendues, est égale à :

$$W_m = \frac{\sigma_{fm} \cdot \Delta l_m}{E_a}$$

si l'on néglige la déformation du béton.

2. Allongement de l'acier selon le B.A.E.L.

Le B.A.E.L. admet que lorsque la fissuration systématique est atteinte, la diminution de l'allongement de l'acier peut être évaluée par la quantité :

$$\frac{f_{tj}}{2E_a \cdot \rho_f} \quad \text{à condition que} \quad \rho_f \geqslant \frac{f_{tj}}{\sigma_f}$$

E_a : module d'élasticité de l'acier,
σ_f : contrainte de l'armature au droit des fissures,
ρ_f : est le rapport de la section d'armatures tendues à une aire de béton tendu, limitée par le contour de la pièce et une parallèle à l'axe neutre déterminée par celle des deux conditions suivantes qui donne la plus grande surface :

– la hauteur du béton tendu, comptée à partir de la fibre extrême est égale à 0,3 fois la hauteur utile de la pièce,

– la hauteur du béton tendu a même centre de gravité que les armatures tendues.

3. Méthode de la Cement and Concrete Association

Une autre théorie de la fissuration a été proposée par la Cement and Concrete Association; elle est basée sur l'hypothèse que l'ouverture des fissures, nulle au niveau de l'armature, n'existe que sur le parement du béton, et que la largeur des fissures ne dépend que des déformations du béton entourant l'armature (fig. I.26).

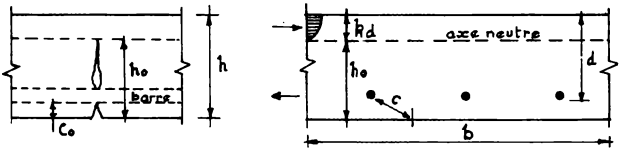


Fig. I.26.

En appelant :

h la hauteur totale de la section,
c la distance d'un point du parement tendu à l'armature la plus proche,
c_0 l'enrobage des armatures de section A sollicitée à la contrainte σ_a.

la formule établie à partir de nombreux essais, réalisés notamment sur des dalles pleines, armées dans une seule direction, est la suivante :

$$W_{max} = \frac{3c \,.\, \varepsilon_m}{1 + \dfrac{2(c - c_0)}{(h - kd)}}$$

avec

$$\varepsilon_m = \left(\varepsilon_a - \frac{2{,}5bh}{A} \times 10^{-6}\right) \frac{h - kd}{d - kd}$$

et

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E_a}$$

La distance moyenne retenue entre les fissures est :

$$\Delta l_m = 1{,}33 h_0 \qquad \text{avec} \qquad h_0 = h - kd$$

D) LA REDISTRIBUTION DES SOLLICITATIONS DANS LES STRUCTURES HYPERSTATIQUES JUSQU'A L'ÉTAT LIMITE ULTIME :

En continuant de charger la poutre isostatique que nous venons d'étudier, au delà de son état de service, la rotation de la section la plus sollicitée augmente considérablement car on note que l'armature s'allonge et que le béton (dont la contrainte dépasse 0,5 f_{cj}) commence à se raccourcir plus vite que sa contrainte n'augmente (zone parabolique du diagramme contrainte déformation). Le béton se plastifie, et, un déchargement subit de la pièce nous montrerait qu'une déformation permanente subsiste. Son raccourcissement est de l'ordre de 2 $^{o}/_{oo}$ lorsque sa contrainte de rupture est atteinte; le béton équilibre encore la composante de compression du couple de flexion et comme l'armature tendue n'a pas atteint un allongement de rupture et peut encore équilibrer la composante de traction, le moment de flexion des forces extérieures est totalement équilibré dans cette section où la rotation est très importante. On dit qu'il y a eu formation d'*une rotule plastique*.

Cette rotule plastique concerne une zone très réduite de la poutre et si nous désignons par l_p la longueur de cette zone, on peut tracer le diagramme de déformation suivant (fig. I.27) :

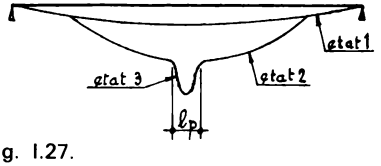


Fig. I.27.

Etat 1 - non fissuré ; état 2 - fissuré ; état 3 - formation de la rotule plastique.

La longueur l_p est généralement prise égale à 0,7 fois la hauteur totale de la section.

Dès la formation de la rotule plastique la rotation de la section devient très importante et on peut considérer que la poutre passe de l'état 2 (où les courbures sont distribuées sur la longueur de l'élément en fonction des raccourcissements et allongements des sections) à l'état 3, où il y a concentration de la déformation plastique au droit de la rotule, avec une rotation totale θ_p (fig. I.28).

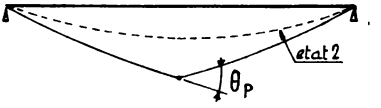


Fig. I.28.

1. Poutre de section constante, encastrée à ses deux extrémités:

La poutre est parfaitement symétrique et nous examinons son comportement, lorsqu'elle est sollicitée par une charge concentrée au milieu de la portée et, ensuite, par une charge uniformément répartie sur toute la longueur. Dans les deux cas, nous notons l'évolution des moments aux encastrements ($M_1 = M_3$) et celle du moment maximal au milieu de la portée (M_2).

a) *Charge concentrée* (fig. I.29)

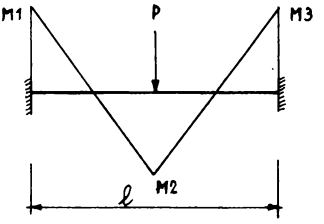


Fig. I.29.

Les moments fléchissants sont donnés par la théorie élastique

$$-M_1 = M_2 = -M_3 = \frac{Pl}{8}$$

Si la charge augmente progressivement à partir de $P = 0$, le moment de fissuration M_f est atteint pour la valeur P_f; simultanément dans toutes les sections critiques, la rigidité de flexion de la poutre diminue et elle commence à se déformer d'une façon non linéaire.

Étant donné la parfaite symétrie des zones fissurées et l'égalité des nouvelles rigidités dans les zones de M_1 et M_2 d'une part, et de M_3 d'autre part, *la distribution des moments fléchissants ne varie pas* jusqu'à atteindre la charge de rupture P_u (fig. I.30).

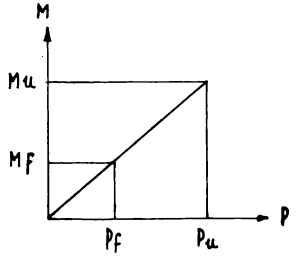


Fig. I.30.

b) *Charge uniformément répartie q par unité de longueur :*

Les moments fléchissants dans les sections critiques sont donnés selon la théorie élastique, par :

$$-M_1 = -M_3 = \frac{ql^2}{12} \quad ; \quad M_2 = \frac{ql^2}{24}$$

soit

$$\frac{|M_1|}{|M_2|} = 2$$

Avec l'augmentation de q, la fissuration commence à apparaître dans les zones d'encastrement, ce qui contribue à y diminuer les rigidités d'où l'augmentation du moment fléchissant en travée où la rigidité initiale est encore conservée. L'équilibre impose dans tous les cas :

$$-M_1 + M_2 = \frac{ql^2}{8}$$

Dès que la limite de fissuration est atteinte en travée la rigidité s'y réduit également et les rigidités tendent à s'égaliser dans toutes les zones critiques; puis, l'accroissement des moments aux encastrements s'accélère jusqu'à ce que par suite d'une nouvelle chute de rigidité, il y ait un nouveau report des sollicitations en travée.

Finalement à un instant donné, le moment M_u est atteint dans toutes les sections critiques. On dit qu'il y a :

– redistribution parfaite des moments de flexion si dans toutes les sections critiques la capacité portante ultime a été atteinte.

– redistribution imparfaite si, à cause de propriétés plastiques insuffisantes, l'une des trois sections critiques se rompt avant les autres (fig. I.31 et I.32).

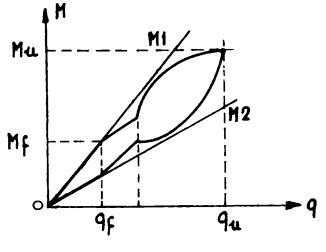


Fig. I.31. — Redistribution parfaite.

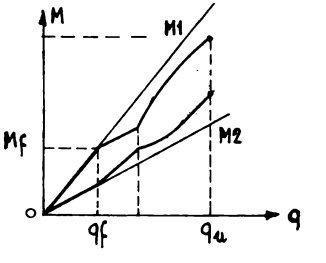


Fig. I.32. — Redistribution imparfaite.

Au cours de la redistribution, le rapport des moments $\frac{|M_1|}{|M_2|}$ varie constamment et, par suite, la position des points de moment nul varie également, mais, compte tenu de la symétrie de la poutre et de la charge, la section critique en travée se trouve toujours au milieu de la portée.

Pour mettre en évidence la redistribution des moments fléchissants reprenons le calcul élastique nous permettant de déterminer M_1 et M_3 (étant entendu que $M_1 = M_3$).

La poutre isostatique du cas b) a une rotation égale à $\frac{ql^3}{24EI}$, de sorte que nous écrivons (fig. I.33) :

$$\frac{ql^3}{24EI} + \frac{M_1 l}{2EI} = 0 \quad , \quad \text{soit} \qquad -\frac{ql^2}{12} = M_1$$

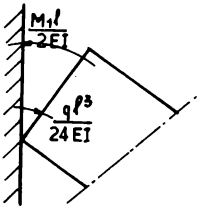


Fig. I.33.

Cela est vrai tant que la fissuration n'apparaît pas au droit de l'encastrement et qu'il est possible de déterminer les contraintes dans la pièce en écrivant les relations :

$$\sigma_s = \frac{M_1 \cdot v_s}{I}$$

$$\sigma_i = \frac{M_1 v_i}{I}$$

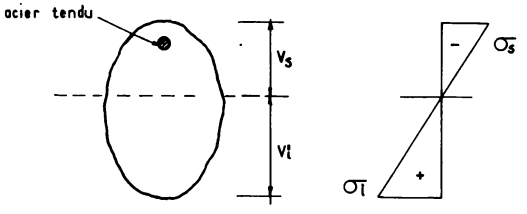


Fig. I.34.

I, v_s et v_i sont déterminés au moyen de la section totale homogénéisée du béton (fig. I.34).

Dès que la première fissure apparaît dans une section de la membrure tendue, il y a report sur l'armature de tout l'effort qui passait dans les fibres tendues et fissurées. Ces armatures qui n'avaient subi, par effet d'adhérence, qu'un allongement compatible avec l'allongement des fibres tendues sont alors soumises, dans cette section, à une surtension $\Delta\sigma_a$ qui correspond à un allongement supplémentaire $\Delta\varepsilon_a$. Avec l'hypothèse de la conservation des sections planes, il y a une légère modification des contraintes de compression dans la zone comprimée entraînant un raccourcissement supplémentaire $\Delta\varepsilon_b$ (fig. I.35).

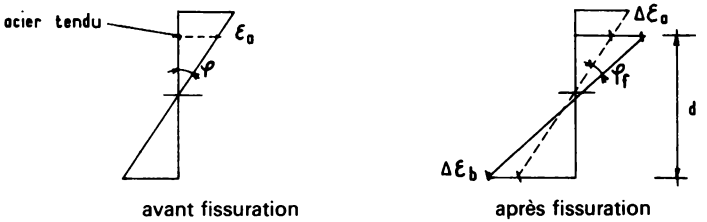
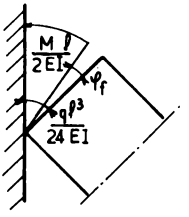


Fig. I.35.

avant fissuration

après fissuration

La courbure qui s'écrivait $\varphi = \dfrac{M}{EI}$ avant fissuration est maintenant égale à $(\varphi + \varphi_f)$, rotation relative plus grande que φ. On remarque ainsi que pour « refermer » la rotation isostatique $\dfrac{ql^3}{24EI}$ il suffit de faire intervenir un moment fléchissant (inconnue hyperstatique) inférieur à M_1, et tel que s'il n'y avait qu'une seule fissure à chaque extrémité de la longueur l de la poutre on ait (fig. I.36) :



$$\frac{ql^3}{24EI} + \frac{Ml}{2EI} = \varphi_f$$

d'où $M < M_1$

Fig. I.36.

Comparativement à la théorie élastique, le moment sur appui diminue donc au fur et à mesure que la fissuration se développe dans la zone d'appui. Le moment en travée est alors plus grand que celui obtenu par le calcul élastique, puisque :

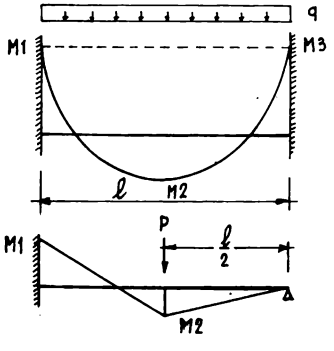
$$M_t = \frac{ql^2}{8} - M$$

De même, lorsque la fissuration apparaît en travée, les rotations relatives φ_f qui en découlent réduisent le moment en travée, renvoyant ainsi sur les appuis encastrés la différence des moments :

$$\frac{ql^2}{8} - M_t.$$

NOTA : une reprise de bétonnage anticipe le phénomène de fissuration.

Dans tous les cas de redistribution il ne faut pas perdre de vue que l'équilibre des moments doit toujours être satisfait et que l'effort tranchant varie en fonction du diagramme des moments fléchissants (fig. I.37).



$$-M_1 + M_2 = \frac{ql^2}{8}$$

Fig. I.37.

$$-\frac{M_1}{2} + M_2 = \frac{Pl}{4}$$

Dans une structure hyperstatique, caractérisée par des liaisons surabondantes, l'apparition d'une rotule plastique correspond donc à la suppression d'une laision. Le schéma résistant est alors une fois moins hyperstatique que le schéma initial. La rupture intervient après qu'une ou plusieurs autres rotules plastiques apparaissent et rendent le système isostatique (sous réserve que les déformations que doivent subir les premières rotules pour permettre aux autres de se former ne soient pas excessives).

2. Exemple d'une poutre continue à deux travées

Considérons d'abord une poutre continue en béton armé d'inertie constante comprenant deux travées égales de 8 m, sollicitée par une charge d'exploitation uniformément répartie. La poutre est libre sur les deux appuis de rive; sa section est de 25 × 60 cm (fig. I.38)

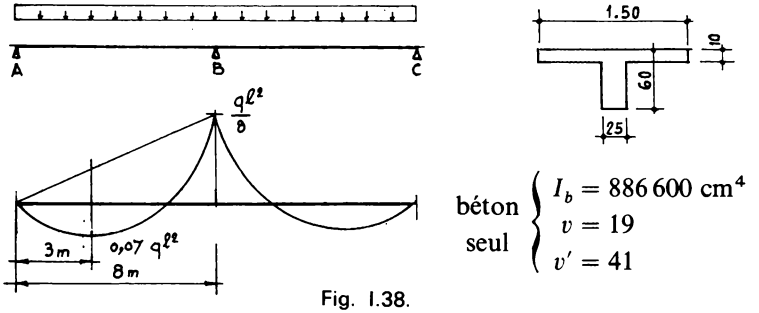


Fig. I.38.

avec $f_{tj} = 21$ kg/cm^2 le moment de fissuration est obtenu, sur l'appui, en écrivant :

$$\frac{M_{f_a} \times 19}{886\,600} = 1{,}5 \times 21 \qquad M_{f_a} = 14\,700 \text{ kgm}; \qquad q = 1\,837 \text{ kgs}$$

et en travée par :

$$M_{f_t} \times \frac{41}{886\,600} = 1{,}5 \times 21 \qquad \text{d'où} \qquad M_{f_t} = 6\,811 \text{ kgm}; \qquad q = 1\,520 \text{ kgs}$$

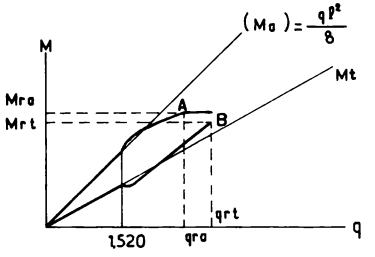
On s'aperçoit que la fissuration en travée intervient avant celle de la zone d'appui. Dès que cette fissuration apparaît en travée, la chute de rigidité qui en résulte fait croître le moment sur appui où la fissuration apparaît ainsi avant que la charge n'atteigne 1 837 kg. On se rend compte aisément que lorsque les deux zones critiques sont fissurées, la courbure sur appui grandit plus vite qu'en travée car le raccourcissement du béton sur appui est fonction de la largeur d'âme de la poutre alors qu'en travée il est fonction de la table de compression.

On note donc une augmentation du moment en travée au détriment du moment sur appui.

La rotule plastique est généralement atteinte, d'abord sur appui, sous un moment M_{ra}. Toute augmentation de q se traduit par une augmentation du moment en travée jusqu'à ce qu'une rotule plastique se forme également en travée (à moins que la rotule d'appui n'ait pu suivre la déformation imposée) et, la rupture survient après épuisement de cette rotule plastique sous M_{rt}.

Si la redistribution des moments est parfaite, il y a formation simultanée des deux rotules plastiques (appui et travée) et les points A et B se confondent (fig. I.39).

Le diagramme (1) correspond sensiblement à la redistribution des moments de flexion dans une poutre qui aurait été armée en utilisant à l'état de service, le diagramme des moments de flexion donné par la théorie élastique.

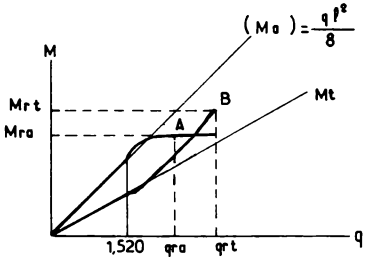


(1)

Fig. I.39.

L'utilisation d'une méthode forfaitaire de redistribution des moments de flexion dans les poutres continues (méthode de A. Caquot par exemple) pour laquelle on choisit un moment sur appui inférieur au moment en travée montre que le moment M_{ra} est atteint plus vite que précédemment (voir le diagramme (2)), car le raccourcissement ε_b est situé dans la zone élasto-plastique (largeur d'âme faible) alors que ε_a est relativement grand à cause de la faible section d'armatures (fig. I.40). Par contre M_{rt} survient beaucoup plus tard dans le système isostatique obtenu car les sections de la partie centrale de la travée bénéficient à la fois de la table de compression et d'un pourcentage d'armature plus élevé. Un risque subsiste : celui d'imposer une rotation trop grande à la rotule plastique d'appui (ce qui correspondrait à $M_{ra} = 0$ et à une rupture brutale de la poutre en travée sous le moment de flexion $\frac{q_{rt} \cdot l^2}{8}$).

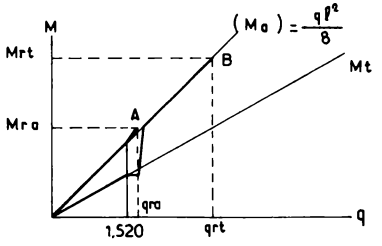
Dans tous les cas, il faut vérifier à l'abscisse x de AB que :



$$M_{rt} + M_{ra} \frac{x}{l} = q_{rt} \frac{x\,(l - x)}{2} \qquad (2)$$

Fig. I.40.

Dans le cas limite où aucune armature n'est prévue sur appui M_{ra} correspond à M_{fa}, et dès que q atteint 1 837 kg environ, on peut considérer que M_{ra} tend vers 0 alors que le moment en travée vaut $\frac{ql^2}{8}$ jusqu'à la rupture (diagramme 3) (fig. I.41).

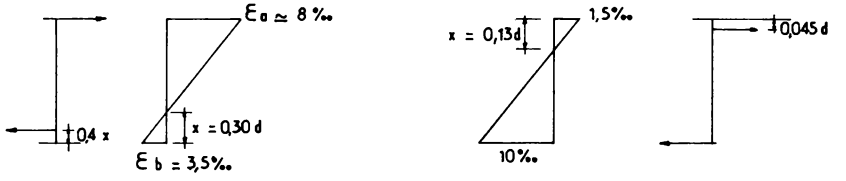


(3)

Fig. I.41.

En réalisant une redistribution parfaite, les deux rotules plastiques A et B sont obtenues pour la charge q_u, et la rupture intervient simultanément en A et B dès que la charge devient $(q_u + \Delta q_u)$ c'est-à-dire légèrement supérieure à q_u.

Si on limite, comme dans la plupart des règlements, le raccourcissement du béton à 3,5 °/₀₀ et l'allongement de l'acier à 10 °/₀₀, et si l'on note que, dans la plupart des planchers de bâtiments, les poutres continues ont une retombée faisant saillie sous le hourdis, on voit que la section cèdera sur appui, par écrasement du béton sans que l'acier n'atteigne l'allongement de 10 °/₀₀, alors que la rupture en travée interviendra avec un allongement de l'armature de 10 °/₀₀ et un raccourcissement du béton de la table de compression de l'ordre de 1,5 °/₀₀ (fig. I.42).



$Z_u = d - 0{,}12d = 0{,}88d$ *Sur appui* *et* $Z_u = d - 0{,}045d = 0{,}955d$ *en travée*

Fig. I.42.

Compte tenu de la présence d'armatures comprimées au droit de l'appui (au bas de la retombée) on peut considérer qu'il y a égalité du bras de levier Z_u, sur appui et en travée, de sorte que pour avoir la simultanéité de formation des rotules plastiques sur appui et en travée il faudrait que les sections d'armatures tendues dans ces deux zones critiques soient égales. On aurait alors la distribution parfaite $M_{ra} = M_{rt}$.

Une telle condition permet de choisir la valeur des moments de flexion, à l'état de service, pour satisfaire aux vérifications des sections à l'état limite ultime

avec la majoration des charges de service imposée par les règlements. En adoptant la règle forfaitaire proposée par le B.A.E.L., pour les cas de surcharges modérées :

$$M_{\text{travée}} + \frac{|M_{\text{appui}}|}{2} = \gamma \cdot \frac{ql^2}{8}, \quad \text{avec} \quad 1{,}05 < \gamma < 1{,}2,$$

nous obtenons pour la poutre continue à 2 travées (fig. I.43), le diagramme des moments suivants, dans le cas où $q = G + Q$ et où $G = 2Q$.

$$-M_a = M_t = 0{,}78M_0 \qquad \text{avec} \qquad M_0 = \frac{ql^2}{8}$$

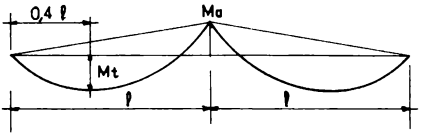


Fig. I.43.

et pour une poutre à plusieurs travées continues (fig. I.44) :

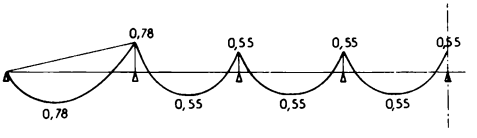


Fig. I.44.

Les dalles continues d'épaisseur constante, portant dans une seule direction, peuvent également être calculées selon les principes ci-dessus.

3. Poutre à goussets (fig. I.45) :

Dans le calcul élastique, les goussets jouent un rôle important dans la distribution des moments de flexion.

Cette importance des goussets diminue quand la fissuration augmente et ce sont les zones voisines des sections critiques qui deviennent déterminantes pour la redistribution des moments. On distingue trois positions de sections critiques sur la longueur des goussets :

- les zones de rigidité les plus faibles (1)
- les zones de rigidité les plus élevées (2)
- les zones comprises entre les deux précédentes (3).

C'est le second cas qui est le plus courant en pratique car dans le premier cas les points de moments nuls se situent généralement à l'intersection du gousset et de la partie de section constante.

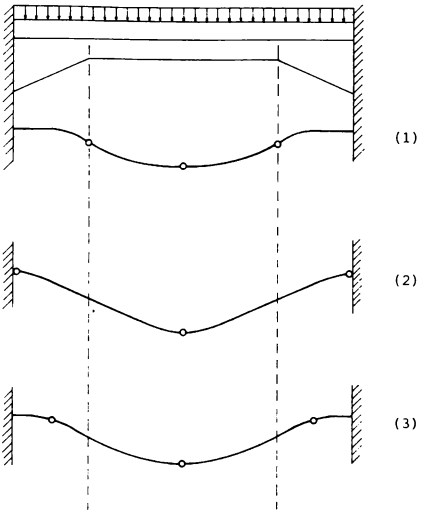


Fig. I.45.

4. Effet de l'effort normal au droit d'un nœud de portique:

La différence que l'on note pour ces nœuds par rapport aux appuis d'une poutre continue, est l'effet de l'effort normal qui réduit considérablement, ou supprime même, les fissures sur la largeur de l'appui. Le domaine plastique commence, dans ce cas, au nu du nœud (cas 1) et non dans l'axe du nœud (cas 2)

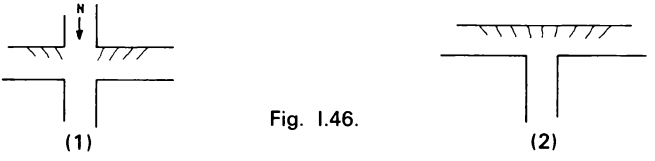


Fig. I.46.

5. Dénivellation des appuis et autres effets secondaires:

La dénivellation des appuis, les effets de la température, le retrait et le fluage du béton, considérés en général comme des effets secondaires ont une importance non négligeable dans le domaine purement élastique. Par contre, après fissuration et plastification de certaines sections, leur influence peut être négligée si la sécurité de la structure et l'équilibre ultime sont vérifiés.

6. Effort tranchant et effet d'arc:

Les armatures d'âme des éléments en béton armé répondent au principe du treillis généralisé de Ritter-Morsh, et nous savons que, dans une section donnée,

par suite du fonctionnement des bielles de béton ainsi que des étriers et cadres, l'effort tranchant produit un moment de flexion supplémentaire qui se traduit par le décalage de la courbe enveloppe des moments fléchissants vers les points de moment nul. L'assimilation de la poutre à un treillis multiple est surtout vraie à partir du moment où elle est fissurée. Elle reste vraie jusqu'à l'état limite ultime. De nombreux essais ont montré l'influence de l'effort tranchant sur l'amplitude de la rotation de la rotule plastique et on mis en évidence, la pénétration des fissures obliques jusqu'à la membrure comprimée de l'élément fléchi.

A côté de cet aspect néfaste de l'influence de l'effort tranchant, il faut noter l'aspect favorable de l'effet d'arc qui avec de bonnes conditions d'extrémité, peut augmenter considérablement la capacité portante ultime (fig. I.47) :

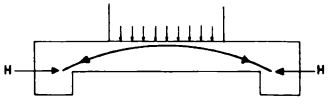


Fig. I.47.

L'existence d'un effort normal longitudinal a une influence bénéfique, en particulier dans les zones d'appui où les contraintes de cisaillement sont élevées. On remarque en effet que la membrure comprimée y est légèrement inclinée et qu'un effort de signe positif vient diminuer l'effort tranchant provenant des charges extérieures.

E) MÉTHODE DE L'ÉQUILIBRE ULTIME,

DÉFINITION

Considérons une structure hyperstatique en béton armé soumise à un chargement quelconque et définissons ses propriétés par les cinq hypothèses suivantes :

– les sections de la structure, où le moment fléchissant M est inférieur au moment ultime M_u, se comportent élastiquement;

– si dans l'une des sections de la structure le moment M_u est atteint, il naît une rotule plastique parfaite d'angle de base θ ;

– lorsque le moment ultime M_u est atteint, la rotation de la section où se situe la rotule plastique, peut augmenter considérablement sans que M_u ne s'accroisse (rotule plastique parfaite) ;

– l'effet d'arc, prenant naissance dans les différents éléments est négligeable;

– avant la ruine, il ne se produit ni flambement dans la structure (ou dans l'une de ses parties), ni rupture par effort tranchant.

Les trois premières hypothèses admettent la transformation :

– du diagramme trilinéaire établi précédemment en un diagramme bilinéaire qui regroupe les deux premières étapes (élastique et élasto-plastique) en

une seule, considérée comme élastique, avec une rigidité moyenne correspondant à la fissuration (fig. I.48);

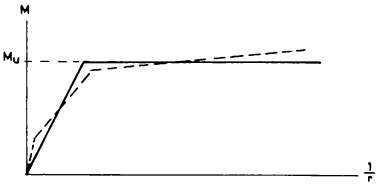


Fig. I.48. — **Diagramme bilinéaire.**

— de la troisième étape (représentée par une droite de pente extrêmement faible) en une horizontale correspondant à la conservation du moment M_u durant toute cette étape.

Avec ces hypothèses, les moments M_u sont atteints dans les différentes sections critiques, et, il y a formation de rotules plastiques au fur et à mesure de l'accroissement de la charge.

Si la structure est n fois hyperstatique et s'il y a création de n rotules plastiques, elle devient isostatique tout en conservant sa capacité portante, l'amplitude de la rotation des rotules plastiques pouvant par hypothèse croître considérablement. La naissance d'une rotule plastique supplémentaire a pour effet de transformer la structure en un « mécanisme » qui devient instable et s'écroule sous l'action d'une augmentation quelconque de la charge.

Au cours de l'accroissement de la charge, l'équilibre statique doit être conservé. Lors de la formation successive des rotules, la répartition des efforts internes, notamment des moments, varie. Juste avant la ruine, *la structure passe par l'équilibre statique ultime* d'où le nom de la méthode.

Rappelons que dans les structures en béton armé, *contrairement à celles en acier*, le moment ultime M_u, n'est généralement pas le même dans les deux sens de la flexion (non symétrie de la section de béton ou d'armature). La rotule plastique est fragile vis-à-vis des chargements répétés et surtout alternés.

DÉTERMINATION DES CHARGES DE RUPTURE

Cette détermination peut se faire par deux méthodes :

1° En écrivant l'équilibre statique de tout ou partie de la structure, au moment de la rupture. On utilise alors **le procédé statique :**

a) une poutre isostatique dans laquelle on crée une rotule plastique devient *hypostatique* (fig. I.49).

Ainsi, dans la poutre AB le moment ultime correspond à :

$$M_u = \frac{P_u . l}{4} \qquad \text{d'où} \qquad P_u = \frac{4M_u}{l}$$

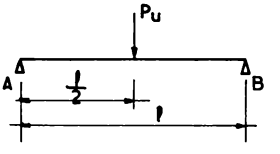
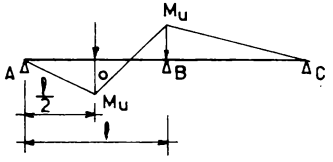


Fig. I.49.

b) si le système est hyperstatique, on le rend isostatique puisqu'on connaît les moments fléchissants dans les rotules (fig. I.50).



$$M_u = \frac{P_u \cdot l}{4} - \frac{M_u}{2} \qquad \text{d'où} \qquad P_u = \frac{6M_u}{l}$$

Fig. I.50.

2° En appliquant **le théorème des travaux virtuels** à la déformation virtuelle du système hypostatique (c'est-à-dire au « mécanisme » de rupture) le théorème nous permet d'écrire que le travail, produit par la charge P_u à l'instant précédant la ruine, est égal au travail des forces internes :

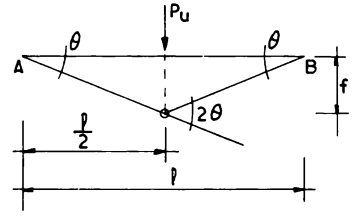


Fig. I.51.

a) dans la poutre isostatique AB, avec

$$f = \frac{\theta l}{2}$$

le travail externe vaut (fig. I.51) :

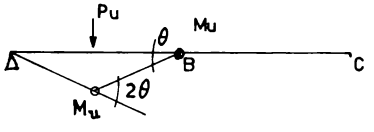
$$P_u \cdot f = P_u \frac{\theta l}{2}$$

et le travail interne :

$$M_u \cdot 2\theta$$

d'où $$P_u \frac{\theta l}{2} = 2M_u \cdot \theta \qquad \text{soit} \qquad P_u = \frac{4M_u}{l}$$

b) dans le système hyperstatique déjà étudié par le procédé statique (fig. I.52)



$$P_u \cdot \frac{\theta l}{2} = M_u\theta + M_u \cdot 2\theta$$

$$P_u = \frac{6M_u}{l}$$

Fig. I.52.

Ce procédé de calcul est parfaitement approprié au calcul pratique; les résultats obtenus doivent permettre de retrouver l'équilibre statique. Avant de traiter quelques exemples, citons les théorèmes fondamentaux :

Théorèmes

Si pour une ossature donnée, soumise à un type de charge donné il est possible de trouver une répartition des moments statiquement admissible, la charge u_{max} qui correspond à une telle répartition est toujours au plus égale à la charge de ruine u_r.

Donc si l'on peut trouver par le *procédé statique* toutes les valeurs de u possibles pour le cas donné, la plus grande d'entre elles est la capacité portante ultime u_r.

De même si on peut trouver, pour le système étudié, plusieurs mécanismes de rupture auxquels correspond pour chacun une capacité portante ultime u, calculée selon le *théorème des travaux virtuels*, cette charge est au moins égale à la charge de ruine u_r. Après avoir déterminé la charge de ruine de chaque mécanisme de rupture, on choisira la plus faible d'entre elles.

Les deux théorèmes ci-dessus peuvent être combinés en un seul que nous appellerons *théorème d'unicité :*

Si pour une ossature donnée, soumise à un type de charge donné, il est possible de trouver au moins une répartition des moments statiquement admissible et si, pour cette répartition, les moments ultimes sont atteints dans autant de sections qu'il est nécessaire pour créer un « mécanisme », la charge correspondant à une telle répartition est justement la charge de ruine cherchée.

1. Exemple A: portique encastré avec charges ponctuelles

(Horizontale en tête du portique
et verticale en milieu de traverse fig. I.53)

Nous négligeons ici l'effort normal et nous supposons critiques les sections 1 à 5. On peut trouver, pour cet exemple, trois mécanismes de rupture possibles.

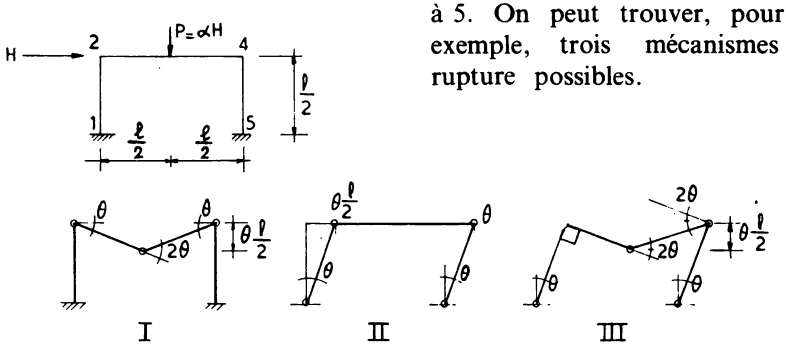


Fig. I.53.

– *Mécanisme I :*

$$\alpha H_{uI} \cdot \frac{\theta l}{2} = M_u\theta + M_u \cdot 2\theta + M_u\theta$$

d'où

$$H_{uI} = \frac{8M_u}{\alpha l}$$

dans ce mécanisme la charge verticale $P_u = \alpha H_{uI}$ est prépondérante.

– *Mécanisme II :*

$$H_{u\,II}\frac{\theta l}{2} = M_u\theta + M_u\theta + M_u\theta + M_u\theta$$

d'où

$$H_{u\,II} = \frac{8M_u}{l}$$

dans ce mécanisme la charge P_u n'intervient pas.

– *Mécanisme III :*

$$H_{u\,III}\cdot\frac{\theta l}{2} + \alpha H_{u\,III}\frac{\theta l}{2} = 2(M_u\theta + M_u.2\theta)$$

$$H_{u\,III} = \frac{12M_u}{l(1+\alpha)}$$

dans ce dernier mécanisme H_u et P_u interviennent.

Pour $\frac{M_u}{l}$ donné $\left(\text{par exemple } \frac{M_u}{l} = 1\right)$, on peut construire les courbes traduisant les relations entre la capacité portante ultime et le rapport α. On constate que pour chaque valeur de α on peut trouver 3 valeurs différentes de la capacité portante ultime (une par mécanisme) dont on choisira la plus faible (fig. I.54).

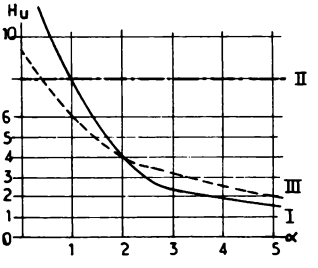


Fig. I.54.

$\alpha = 0{,}25$	Hu I = 32	**Hu II = 8**	Hu III = 9,6
$\alpha = 1$	Hu I = 8	Hu II = 8	**Hu III = 6**
$\alpha = 2$	**Hu I = 4**	Hu II = 8	**Hu III = 4**
$\alpha = 5$	**Hu I = 1,6**	Hu II = 8	Hu III = 2

2. Exemple B : Poutre continue uniformément chargée (fig. I.55)

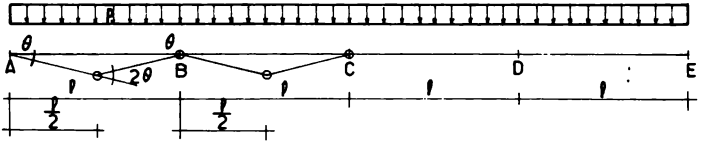


Fig. I.55.

Travée AB: (liberté en A)

Travail interne (fig. I.56)

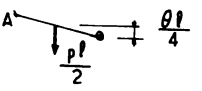


Fig. I.56.

$$\frac{pl}{2}\cdot\frac{\theta l}{4}+\frac{pl}{2}\cdot\frac{\theta l}{4}=M_u\theta+0+M_u.2\theta$$

d'où $\dfrac{2pl^2}{8}=3M_u$ et $M_u=\dfrac{pl^2}{12}$ (fig. I.57)

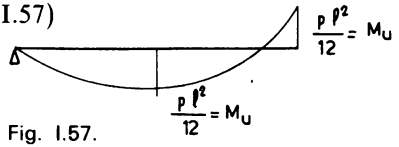


Fig. I.57.

Travée BC:

On a de même (fig. I.58)

$$2\left(\frac{pl}{2}\cdot\frac{\theta l}{4}\right)=M_u\theta+M_u\theta+M_u2\theta$$

d'où $M_u=\dfrac{pl^2}{16}$

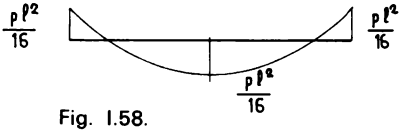


Fig. I.58.

3. Exemple C: Portique étagé

Portique étagé soumis à chaque niveau à une force horizontale H et à une charge uniformément répartie (charge permanente g + charge d'utilisation q) (fig. I.59).

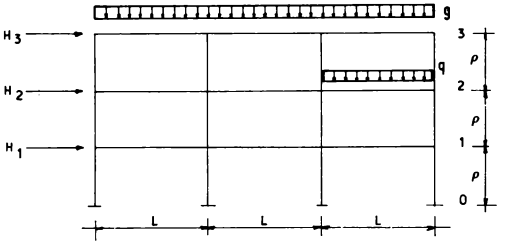


Fig. I.59.

a) *Sous les charges horizontales*, cinq mécanismes peuvent se former (fig. I.60)

- mécanisme I (8 rotules plastiques):

$$H_3\theta l=8M_{u\,\mathrm{I}}.\theta$$

- mécanisme II (8 rotules plastiques):

$$(H_2+H_3)\theta l=8M_{u\,\mathrm{II}}.\theta$$

- mécanisme III (8 rotules plastiques):

$$(H_1+H_2+H_3)\theta l=8M_{u\,\mathrm{III}}.\theta$$

– mécanisme IV (16 rotules plastiques):

$$H_3 . 2\theta l + H_2 \theta l = 16 M_{u\,\mathrm{IV}} . \theta$$

– mécanisme V (22 rotules plastiques):

$$H_3 . 3\theta l + H_2 2\theta l + H_1 \theta l = 22 M_{u\,\mathrm{V}} . \theta$$

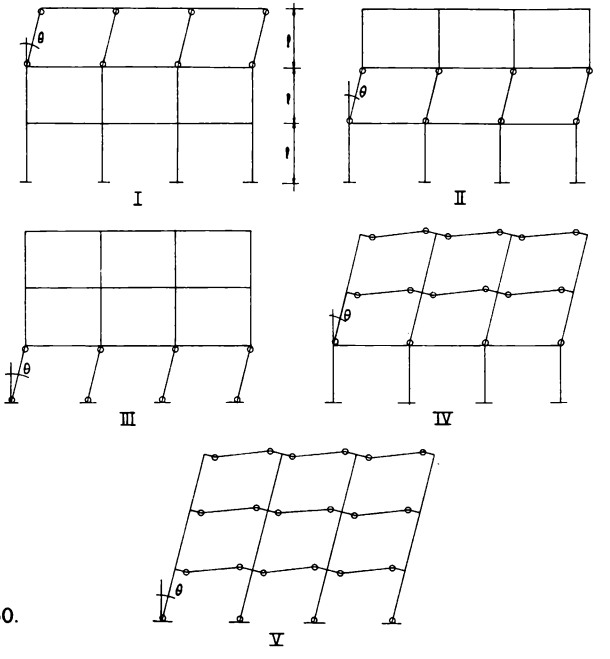


Fig. I.60.

Si une des rotules intervient dans plusieurs mécanismes il est recommandé de dimensionner la section pour la somme des moments ultimes.

Ainsi en pied de poteaux, au niveau 0, le moment à retenir sera:

$$M_u = M_{u\,\mathrm{III}} + M_{u\,\mathrm{V}}$$

soit, si $H_1 = H_2 = H_3$

$$M_{u\,\mathrm{III}} = \frac{3Hl}{8} = 0{,}375Hl$$

$$M_{u\,\mathrm{V}} = \frac{6Hl}{22} = 0{,}272Hl$$

donc $$M_u = 0{,}647Hl$$

L'hypothèse d'intervention simultanée de plusieurs mécanismes est, certes, dans le sens de la sécurité car elle ne tient pas compte de la probabilité de cette simultanéité.

On peut vérifier évidemment que l'équilibre statique est obtenu pour chaque mécanisme (fig. I.61, I.62, I.63):

– dans les mécanismes I, II et III par exemple $M_{uI} = 0{,}125Hl$
$M_{uII} = 0{,}250Hl$
$M_{uIII} = 0{,}375Hl$

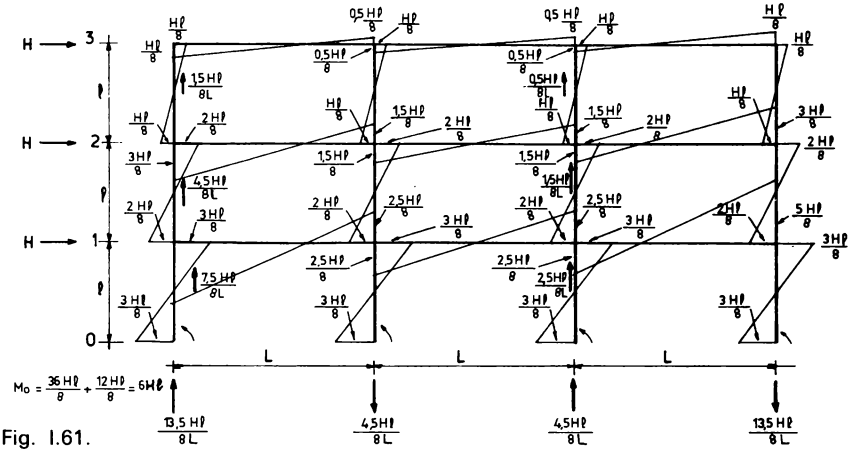


Fig. I.61.

– dans le mécanisme IV :

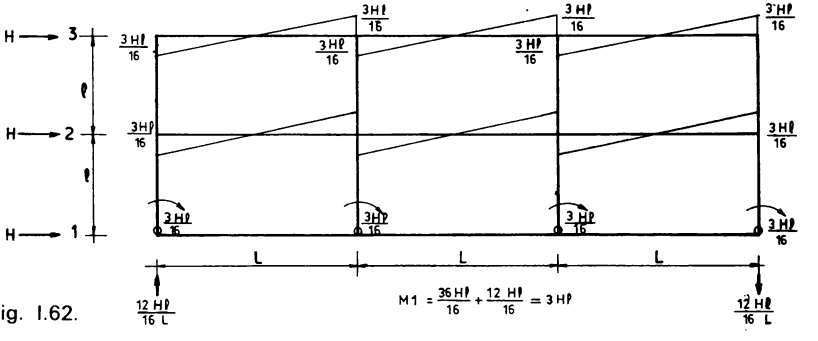


Fig. I.62.

– dans le mécanisme V :

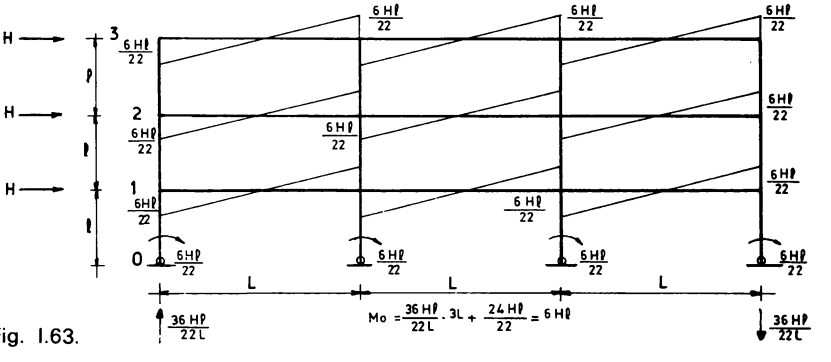


Fig. I.63.

Jusqu'à la formation des rotules plastiques, le portique fonctionne élastiquement (état fissuré). Toutes les sollicitations et déformations sont d'abord déterminées suivant la résistance des matériaux puis en tenant compte de la chute de rigidité due à la fissuration. La formation des rotules plastiques crée une redistribution des moments et provoque le déplacement ultime Δ_u.

On appelle généralement « ductilité » le rapport $\frac{\Delta_u}{\Delta_y}$ du déplacement ultime au déplacement élastique (voir A. Fuentes, tome II, pages 172 à 188). Pour une ductilité choisie à priori, certains mécanismes conduisent à un rapport $\frac{\Phi_u}{\Phi_y}$ (de la courbure, à l'état limite ultime, à la courbure dans le système élastique) trop important pour supposer que la rotule plastique ne soit pas épuisée. Ce serait le cas des mécanismes I, II, III. On devrait respecter $\frac{\Phi_u}{\Phi_y} \leqslant 10$.

b) *Sous les charges verticales :*

– *Sans déplacement des nœuds*

Lorsque toutes les travées sont uniformément chargées à tous les niveaux le problème est celui des poutres continues que nous avons déjà vu (sauf qu'il n'y a pas d'appuis libres aux extrémités). Ceci est vrai pour toutes les charges permanentes ou pour les planchers à surcharge modérée où l'on évite habituellement l'étude des surcharges défavorables en considérant une charge uniformément répartie qui incorpore la charge permanente et la charge d'exploitation.

Rappelons que dans ce cas il suffit d'écrire (fig. I.64) :

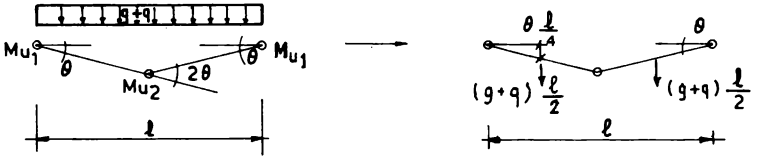


Fig. I.64.

$$2(g+q)\frac{l}{2}\cdot\frac{\theta l}{4} = 2M_{u1}\theta + M_{u2}\cdot 2\theta$$

soit

$$\frac{1}{8}(g+q)l^2 = M_{u1} + M_{u2}$$

– *Avec déplacement des nœuds* (fig. I.65).

La position des rotules plastiques est déterminée en tenant compte du chargement, du ferraillage et des reprises de bétonnage.

Ce genre d'ouvrage qui peut bénéficier de la rigidité de l'ensemble des traverses et montants doit être exécuté avec le plus grand soin tant pour la mise en place du ferraillage que pour les phases de bétonnage. Cependant, même si aucune reprise de bétonnage n'est effectuée au cours de l'exécution des travées s'étendant de A à F ou de A_1 à F_1, il est impossible, dans l'exécution des montants, de ne pas

trouver une reprise de bétonnage, en pied au-dessus des traverses et, en tête à la sous-face des traverses AF.

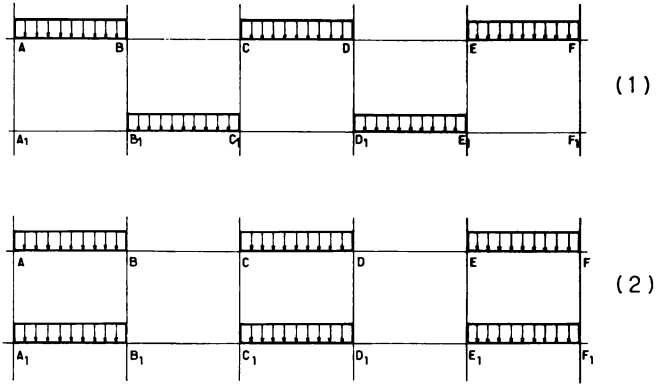


Fig. I.65. — Portique à traverses et montants de section constante soumis à des charges verticales, avec nœuds déplaçables).

Si les charges correspondent au cas (1) et pour un ferraillage assurant une bonne continuité, on peut se trouver dans le cas de la poutre continue avec création de rotules plastiques comme indiqué ci-après (car les plus grands moments sur appuis et en travée se situent dans AB, CD, EF) (fig. I.66a).

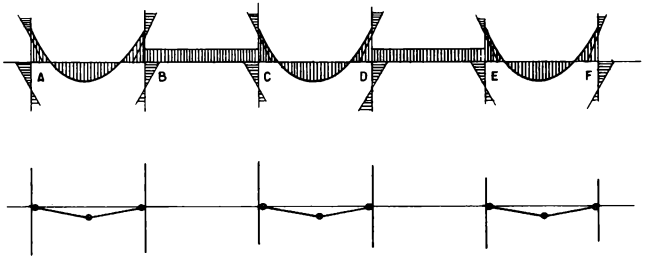


Fig. I.66.

Mais si, indépendamment d'un bétonnage continu, les armatures horizontales tendues et comprimées *sont largement dimensionnées au droit des nœuds* les rotules plastiques peuvent se créer pour le cas (1):

- Dans les traverses $BC - DE$ (ou $A_1B_1 - C_1D_1 - E_1F_1$).
- Dans les montants $BB_1 - CC_1 - DD_1 - EE_1$.

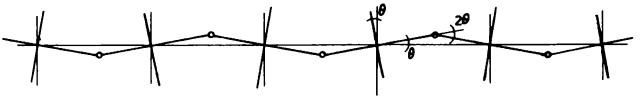


Fig. I.67.

En effet dans les traverses *BC, DE* où le moment fléchissant déduit du système élastique est constant, la courbure est également constante avant fissuration, mais après fissuration, une rotule plastique peut se créer au milieu de la travée car c'est là que l'armature est, en principe, la plus faible puisque nous avons supposé qu'au droit des nœuds le ferraillage était dense (fig. I.67).

Par ailleurs, dans les montants du cas (1), deux possibilités peuvent être envisagées compte tenu du moment fléchissant constant qui les sollicite avant fissuration :

• Le ferraillage des montants est très renforcé au droid des nœuds tels B et B_1 ou C et C_1 de sorte que, malgré les reprises de bétonnage, une rotule plastique aura tendance à se créer dans la partie centrale des montants (fig. I.68).

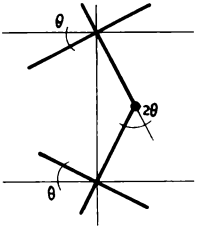


Fig. I.68.

• Le ferraillage des montants est constant sur toute la hauteur de sorte que la courbure y est aussi théoriquement constante ; cependant l'existence des reprises de bétonnage transforme le diagramme des courbures avant même que la fissuration de la partie courante du montant apparaisse (cette fissuration est plus ou moins retardée suivant l'importance des charges verticales qui sollicitent les montants) (fig. I.69).

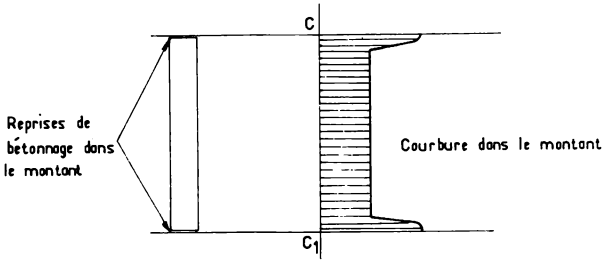


Fig. I.69.

Avec la rotation des nœuds, deux rotules plastiques peuvent naître au droit des reprises de bétonnage qui sont en fait les zones les plus faibles des montants (fig. I.70) :

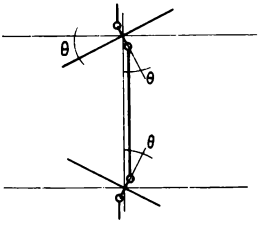


Fig. I.70.

Dans les montants du cas (2), les rotules plastiques sont représentées ci-après (fig. I.71) :

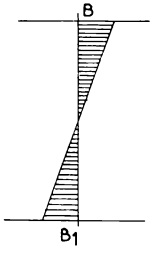
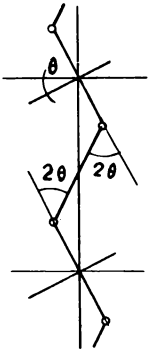


Fig. I.71.



Équilibre des nœuds :

A partir des moments résistants ultimes Y, Y' et m_{u2} de trois barres, on peut déduire le moment ultime M_{u2} dans la 4e barre du nœud (fig. I.73).

Notons que dans le cas d'un chargement dissymétrique la rotule plastique ne se crée pas au milieu de la barre la moins chargée mais entre le nœud et le milieu de la portée (généralement à l'extrémité des chapeaux de continuité) (fig. I.72) :

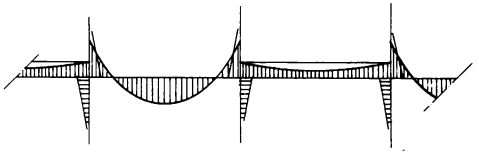


Fig. I.72.

Pour fixer les idées nous supposons que cette rotule plastique se forme au $\frac{1}{4}$ de la portée de la travée la moins chargée.

L'équation des travaux virtuels s'écrit ici en considérant une demie-travée de part et d'autre du nœud où seule la charge g_u contre-balance la charge $g_u + q_u$

$$(g_u + q_u)\frac{l_1}{2}\frac{\theta l_1}{4} - g_u\frac{l_2}{4}\cdot\frac{\theta l_2}{8} - g_u\frac{l_2}{4}\cdot\frac{\theta l_2}{4} = M_{u2}\theta + Y'\theta + Y\theta + m_{u2}\theta$$

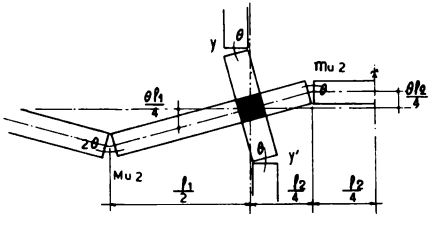


Fig. I.73.

Cette équation peut encore s'écrire :

$$(g_u + q_u)\frac{l_1^2}{8} - \frac{3}{32}g_u l_2^2 = M_{u2} + m_{u2} + Y + Y' \qquad (1)$$

Dans le cas où les rotules correspondent à la figure I.74 ci-dessous

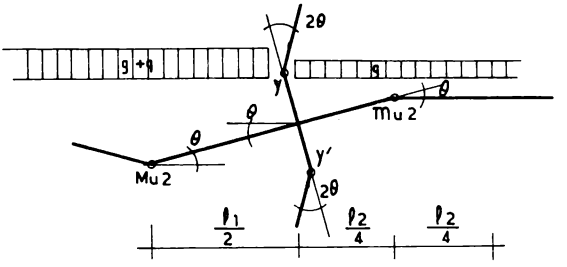


Fig. I.74.

l'équation se met sous la forme :

$$(g_u + q_u)\frac{l_1^2}{8} - \frac{3}{32} g_u l_2^2 = M_{u2} + m_{u2} + 2(Y + Y') \qquad (2)$$

N.B. : Pour $(g + q)$ donnés l'équation (1) impose un dimensionnement plus important pour les éléments aboutissant au nœud étudié.

c) *Action combinée des charges verticales et horizontales, dans le cas de nœuds déplaçables* (fig. I.75) :

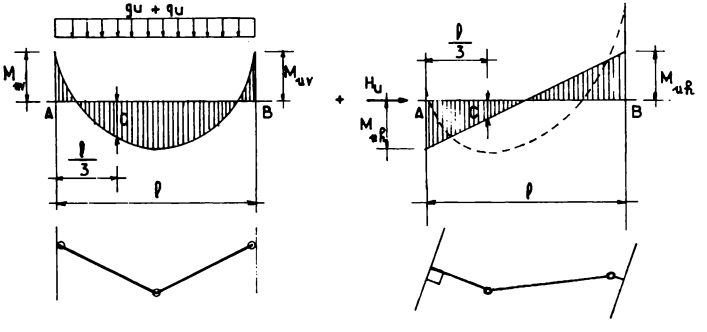


Fig. I.75.

Pour une direction précise de l'effort horizontal les moments négatifs ultimes s'ajoutent, au droit d'un nœud (B sur la figure ci-dessus) alors qu'une rotule plastique a tendance à se créer aux environs du tiers de la portée AB, sous l'effet des moments positifs qui s'additionnent (point C sur la figure ci-dessus).

Il y a donc lieu d'examiner les positions des rotules plastiques dans les différents mécanismes qui peuvent exister en faisant intervenir :

- les charges verticales seules,
- les charges horizontales (généralement réversibles) seules.

Au droit des rotules plastiques communes aux deux systèmes (sollicitations verticale et horizontale), on considère que le moment ultime s'écrit :

$$M_u = M_{uv} + M_{uh}$$

Pour tenir compte directement de la superposition des deux effets, (comme nous l'avons vu au chappitre III.C du Tome II de A. Fuentes) il y a lieu de

procéder, notamment dans le cas du séïsme, à l'étude du mécanisme ci-après qui permet de dimensionner la rotule plastique située sensiblement au 1/3 de la portée des traverses (fig. I.76):

$$H_4 . 4\theta h + H_3 . 3\theta h + H_2 . 2\theta h + H_1 . \theta h = 16 M_{up} . \theta_1 + 3 M_{uc} . \theta$$

avec $\theta l = \theta_1 . \frac{2l}{3}$ moments ultimes $\begin{cases} M_{uc} \rightarrow \text{colonne} \\ M_{up} \rightarrow \text{poutre} \end{cases}$

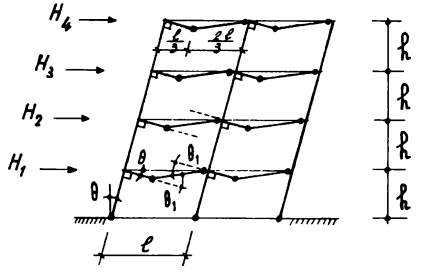


Fig. I.76.

4. Exemple D: Refend à file d'ouverture

Refend à file d'ouverture soumis à des forces horizontales.
Le mécanisme de rupture à retenir correspond à la figure ci-dessous.

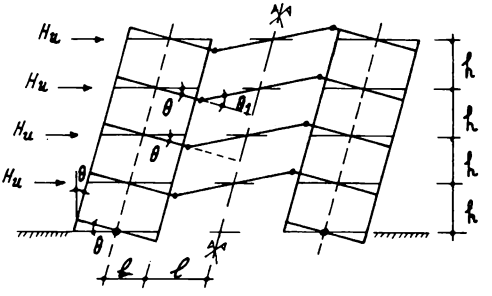


Fig. I.77.

L'équilibre du travail externe et du travail interne s'écrit:

$$H_u \theta h + H_u 2\theta h + H_u . 3\theta h + H_u . 4\theta h = 10 M_u . \theta$$

en ramenant les rotules plastiques dans l'axe des refends et en appelant M_u le moment ultime sur ce même axe (fig. I.77).

On a ainsi

$$M_u = H_u . h$$

(valeur à retenir en pied de chaque refend).

Les moments M_{u1} au droit de chaque rotule plastique dans les linteaux sont tels que:

$$10 H_u . h\theta = 8 M_{u1} \theta_1 + 2 M_u \theta$$

avec

$$\theta_1 l = \theta(b + l)$$

d'où suivant la figure I.78 :

$$8H_u h\theta = 8M_{u1}\theta\left(\frac{b+l}{l}\right)$$

$$M_{u1} = \frac{H_u h \,.\, l}{b+l} \qquad \text{ou} \qquad H_u = M_{u1}\left(\frac{b+l}{hl}\right)$$

L'effort normal dans l'axe de chaque refend vaut $\dfrac{H_u \,.\, h}{b+l}$ par niveau :

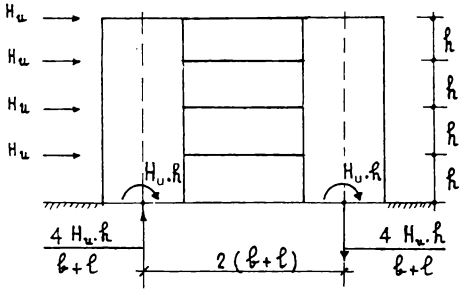


Fig. I.78.

Pour un refend donné et en respectant l'hypothèse 3 de la méthode de l'équilibre ultime on peut donc déterminer la charge ultime H_u à partir du moment ultime des linteaux. Dans le cadre d'une réglementation telle le B.A.E.L., où les déformations d'une pièce dans une section sont limitées :

$$\varepsilon_a \leqslant 10\,{}^{0}/_{00} \qquad 2\,{}^{0}/_{00} < \varepsilon_b \leqslant 3{,}5\,{}^{0}/_{00}$$

la vérification à l'état limite ultime nous conduirait à considérer :

– soit que le moment ultime est atteint en pied du mur et que le reste du moment fléchissant extérieur est repris par les linteaux qui n'ont peut-être pas atteint leur résistance ultime;

– soit que le moment ultime est atteint dans tous les linteaux et que le reste du moment fléchissant extérieur est repris par la base des murs qui n'a peut-être pas atteint sa résistance ultime.

Dans les deux cas il est simple de calculer les déplacements, niveau par niveau, sans omettre de prendre en compte, dans le calcul de la courbure des murs, les charges verticales (permanentes avec ou sans charges d'exploitation) ainsi que l'effort normal provenant des moments fléchissants dans les linteaux ; ce dernier, de signe contraire dans chacun des murs, pourrait être négligé dans la recherche du déplacement moyen des murs composant le refend à file d'ouvertures.

5. Exemple E: Systèmes à poutres croisées:

a) La charge P_u sur le système de poutres 1-2, posées librement est obtenue en écrivant (fig. I.79):

$$\delta = \frac{\theta l}{2} = \frac{\theta_1 l_1}{2} \qquad \theta = \frac{2\delta}{l} \qquad \theta_1 = \frac{2\delta}{l_1}$$

$$P_u\delta = 2M_u\theta + 2M_{u1}\theta_1 \qquad P_u = 4\left(\frac{M_u}{l} + \frac{M_{u1}}{l_1}\right)$$

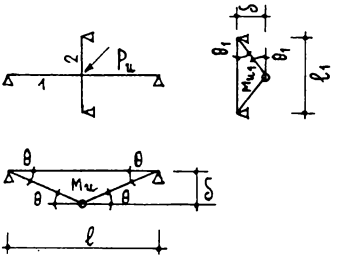


Fig. I.79.

b) La charge P_u au nœud B du système de poutres 1-2-3-4 de la figure ci-dessous peut être obtenue en tenant compte de ce que (fig. I.80):

Le moment de flexion ultime de la poutre 1 est M_{u1} et le moment ultime de toutes les poutres transversales 2-3-4 est M_{u2}. Le moment de torsion ultime de toutes les poutres transversales est C_{u2}*(en admettant que les appuis de ces poutres présentent un encastrement à la torsion).

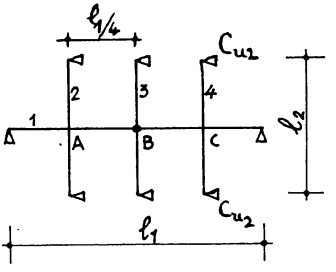


Fig. I.80.

On peut ainsi obtenir les trois mécanismes de rupture ci-après:

– *Mécanisme I* (fig. I.81):

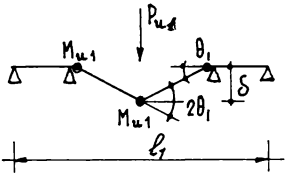
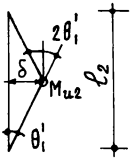


Fig. I.81.



Il donne l'équation des travaux virtuels suivante:

$$P_{u1} \cdot \delta = M_{u1} \cdot \theta_1 + 2M_{u1} \cdot \theta_1 + M_{u1}\theta_1 + 2M_{u2} \cdot \theta_1'$$

$$P_{u1} \cdot \theta_1' \frac{l_2}{2} = 4M_{u1} \cdot 2\theta_1' \frac{l_2}{l_1} + 2M_{u2} \cdot \theta_1'$$

$$P_{u1} = \frac{16M_{u1}}{l_1} + \frac{4M_{u2}}{l_2}$$

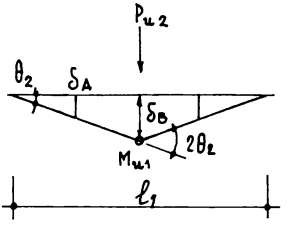
(*) Voir torsion des poutres en béton armé sur tome II A.F. chapitre I.B.

– *Mécanisme II.*

On tient compte en A et C non seulement des moments de flexion M_{u2} mais également des moments de torsion C_{u2} (fig. I.82)

avec $\theta_2 \cdot \frac{l_1}{2} = \delta_B \qquad \theta_B \cdot \frac{l_2}{2} = \delta_B \qquad \theta_A \cdot \frac{l_2}{2} = \delta_A = \frac{\delta_B}{2}$

on a $\begin{cases} \theta_A = \dfrac{\delta_B}{l_2} = \dfrac{\theta_2 l_1}{2l_2} \\ \theta_B = \theta_2 \dfrac{l_1}{l_2} \end{cases}$



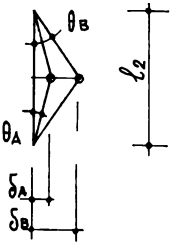


Fig. I.82.

L'équation des travaux virtuels s'écrit :

$$P_{u2} \cdot \delta_B = M_{u1} \cdot 2\theta_2 + 2M_{u2} \cdot 2\theta_A + M_{u2} \cdot 2\theta_B + 4C_{u2} \cdot \theta_2$$

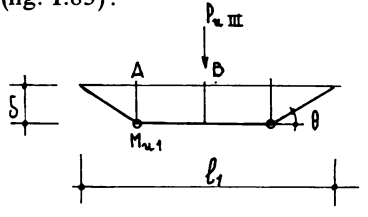
le dernier terme du 2e membre indique que la rotation de torsion des poutres 2 et 4 est θ_2.

$$P_{u2}\theta_2 \frac{l_1}{2} = M_{u1} 2\theta_2 + 2M_{u2}\theta_2 \frac{l_1}{l_2} + M_{u2} 2\theta_2 \frac{l_1}{l_2} + 4C_{u2} \cdot \theta_2$$

$$P_{u2} = \frac{4M_{u1}}{l_1} + \frac{8M_{u2}}{l_2} + \frac{8C_{u2}}{l_1}$$

$$P_{u2} = 4\left(\frac{M_{u1}}{l_1} + \frac{2M_{u2}}{l_2} + \frac{2C_{u2}}{l_1}\right)$$

– *Mécanisme III* (fig. I.83) :



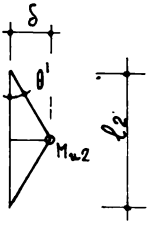


Fig. I.83.

$$\theta = \frac{4\delta}{l_1} \qquad \theta' = \frac{2\delta}{l_2} \qquad \theta' = \frac{l_1\theta}{2l_2}$$

L'équation des travaux virtuels s'écrit ici :

$$P_{u\,III}\delta = 2M_{u1} \cdot \theta + 3M_{u2} \cdot 2\theta'$$

$$P_{u\,III} \frac{\theta l_1}{4} = 2M_{u1}\theta + 6M_{u2} \frac{l_1\theta}{2l_2}$$

$$P_{u\,III} = \frac{8M_{u1}}{l_1} + \frac{12M_{u2}}{l_2}$$

6. Contreventement par remplissage en maçonnerie

Effet de charges horizontales croissantes sur une ossature en béton armé contreventée par des remplissages, comportement jusqu'à rupture (fig. I.84) :

Cette technique est utilisée pour la construction de la plupart des bâtiments de huit à dix niveaux, dans de nombreux pays méditerranéens (Afrique du Nord et Espagne notamment).

Elle consiste à exécuter en premier lieu, une ossature en béton armé (poteaux et planchers), capable de reprendre toutes les charges verticales puis à venir empêcher tout déplacement latéral de cette ossature en bloquant les poteaux et planchers par des remplissages en parpaings de ciment ou en briques de terre cuite.

Ces remplissages constituent les façades, les murs séparatifs d'appartements (ou de locaux divers), dans au moins deux directions orthogonales. A la limite, les cloisons de séparation des pièces peuvent intervenir, pour une faible part (risque de flambement), dans ce système de contreventement.

Sous des charges horizontales le fonctionnement de la structure peut être analysé de la façon suivante :

a) Déplacement de l'ossature en béton armé jusqu'à blocage par les remplissages et mobilisation des bielles qui se créent au travers de ces remplissages. Ce déplacement intervient sous de faibles efforts horizontaux car l'ossature est très souple.

b) Fonctionnement du contreventement par intervention de bielles qui peuvent se présenter différemment suivant l'existence ou non, de baies dans les remplissages.

Les schémas ci-après donnent une idée de la formation de ces bielles et de leur équilibre.

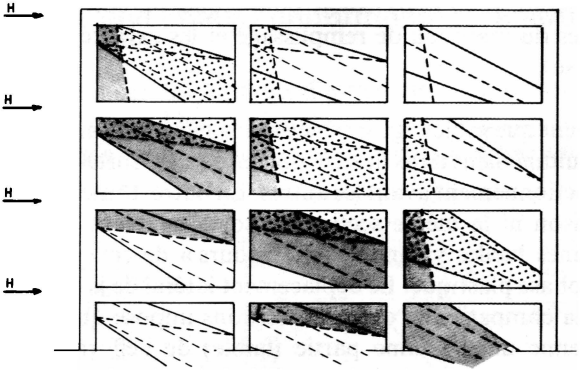


Fig. I.84. — Panneaux de remplissage sans ouvertures (voir A. Fuentes, Tome I).

Dans le cas (fig. I.85) on peut aisément se rendre compte du rôle important que peuvent jouer les montants verticaux, en tableaux des ouvertures, et du gain de résistance globale de l'ouvrage si ces montants sont en béton armé (même de

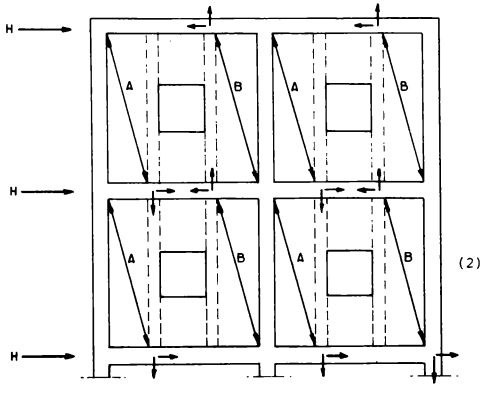


Fig. I.85. — Panneaux de remplissage avec ouverures.

faible épaisseur). Si cela n'est pas le cas on s'aperçoit que les diagonales *A* mettent le remplissage en compression tandis que les diagonales *B* peuvent être inefficaces si les panneaux supérieurs n'offrent pas une charge suffisante ou si le plancher ne peut supporter la flexion ainsi créée. A ce propos, rappelons que les remplissages s'exécutent de bas en haut, soit en même temps que l'ossature « monte » soit après qu'elle soit terminée. Dans le premier cas surtout, le fluage des poutres (souvent de faible inertie) met les panneaux de remplissage en compression, d'où le blocage naturel du panneau dans le sens vertical. Pour limiter les contraintes de compression dans les panneaux il serait intéressant d'apprécier la déformation de fluage dans le temps.

Dans la deuxième phase, les bielles fonctionnent d'abord élastiquement (module d'élasticité *E* du remplissage pour lequel on doit prendre en compte les caractéristiques du matériau de remplissage et les caractéristiques élastiques du mortier de pose).

Il est évident que le blocage, permettant la mise en compression des bielles, ne se fait pas simultanément dans la structure entière de sorte que certaines bielles se mettent en fonctionnement avant les autres. En outre, toutes les bielles n'ont pas la même inclinaison ni la même section de sorte qu'avant épuisement global du système certaines bielles viennent « au secours » de celles qui sont arrivées au terme de leur phase plastique. Le déplacement latéral de la structure devient alors important et la compatibilité des déformations impose que l'ossature (poteaux-poutres) reprenne une certaine partie (faible) de l'effort extérieur horizontal. Quand toutes les bielles sont épuisées, l'effort total se reporte sur l'ossature et c'est la ruine (fig. I.86).

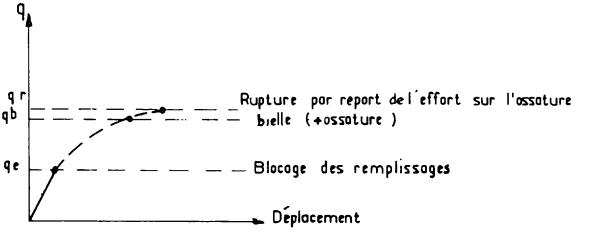


Fig. I.86.

Ce système de contreventement, valable pour reprendre les efforts horizontaux du vent appliqués sur des ouvrages de hauteur moyenne (une dizaine d'étages), ne devrait pas être retenu dans une zone sismique à moins que la densité des remplissages puisse permettre de démontrer que la bonne tenue de l'ouvrage n'est pas compromise sous les efforts horizontaux et verticaux correspondant au séisme éventuel ; il y aurait lieu de prévoir des montants verticaux armés (notamment en tableau des baies) et des appuis de fenêtre ou bien des linteaux formant chaînage périphérique, des poteaux d'angle de forte inertie dans les deux directions privilégiées, et, de vérifier, dans les niveaux bas, que l'effort tranchant résultant des forces d'inertie peut effectivement être repris dans tous les plans horizontaux, en particulier aux reprises poteaux-planchers où les seules sections des poteaux et montants doivent reprendre l'effort horizontal résultant. Dans une telle technique, il sera plus simple de monter l'ossature en même temps que le remplissage qui servira de coffrage aux poteaux, montants, poutres et chaînages horizontaux, devenant partiellement ou totalement porteur (vérification du fluage des poutres).

NOTA : Les chaînages et les poutres équilibrent les bielles qui se forment dans les remplissages et dans les planchers, leur section d'armatures doit donc être vérifiée avec soin en traction pure ou en traction-flexion.

7. Dalle rectangulaire articulée sur quatre appuis simples rigides et soumise à une charge uniformément répartie p. (fig. I.87*a*)

En nous appuyant sur des résultats d'essais, nous raisonnerons sur le mécanisme de rupture dans lequel les rotules plastiques se forment, suivant les bissectrices de chaque angle, en mobilisant, dans chaque direction principale, les moments unitaires m_{u1} et m_{u2}.

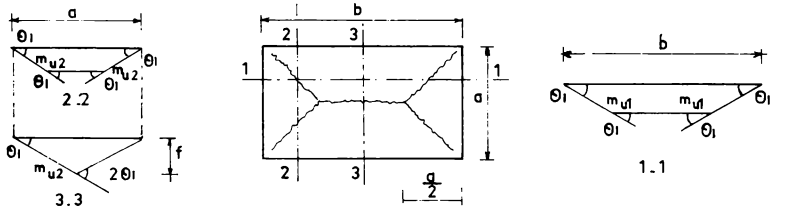


Fig. I.87.*a*.

Le travail externe s'écrit :

$$p\left[\left(\frac{f}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\right)+\left(\frac{f}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\right)+\frac{f}{2}(ab-a^2)\right]=p\left(\frac{fab}{2}-\frac{fa^2}{6}\right)$$

ou

$$\frac{paf}{6}(3b-a)=\frac{pa^2\theta_1}{12}(3b-a)$$

avec

$$f=\theta_1\cdot\frac{a}{2}$$

Le travail interne a pour expression :

$$m_{u1}\,.\,a\,.\,2\theta_1+m_{u2}\,.\,b\,.\,2\theta_1$$

L'égalité du travail externe et du travail interne donne ainsi :

$$\frac{pa^2}{12}(3b-a)=2m_{u1}\,.\,a+2m_{u2}\,.\,b$$

Ce qui peut s'écrire en introduisant le rapport $\frac{a}{b}=\rho\leqslant 1$

$$\frac{pa^2}{24}\left(3-\frac{a}{b}\right)=m_{u1}\cdot\frac{a}{b}+m_{u2}$$

Ceci nous montre que pour un moment ultime égal dans les deux directions principales $m_u=m_{u1}=m_{u2}$ la charge ultime est donnée par : $p=\frac{24m_u}{a^2}\cdot\frac{1+\rho}{3-\rho}$

pour $\rho=1$:

$$p=\frac{24m_u}{a^2}$$

et si $\frac{a}{b}$ tend vers 0 : p tend vers $\frac{8m_{u2}}{a^2}$.

8. Plaque rectangulaire continue au delà de ses 4 appuis de rive :

Nous supposons ici que les appuis sont quatre poutres continues et que la plaque est soumise à une charge uniformément répartie. A l'état limite ultime, les rotules plastiques apparaissent :

– sur les appuis et en travée des poutres,

– le long des 4 poutres et suivant les deux médianes du rectangle, en ce qui concerne la plaque (fig. I.87*b*).

La vérification ultime pourra être faite de la façon suivante :

$AB=L$
$BC=l$ (p = charge par unité de surface)

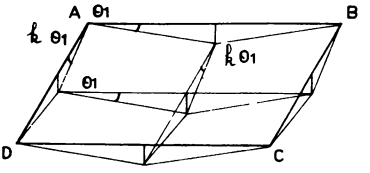


Fig. I.87 *b*.

travail externe :

$$\frac{4plL}{4}\left(\theta_1 . \frac{L}{4} + k.\theta.\frac{l}{4}\right)$$

travail interne :

$$2[2M_{uL}\theta_1 + M'_{uL}.2\theta_1 + 2M_{ul}.k\theta_1 + M'_{ul}.2k\theta_1]$$
$$+ 2m_{ul}.Lk\theta_1 + m'_{ul}.L2k\theta_1 + 2m_{uL}.l\theta_1 + m'_{uL}l2\theta_1$$

soit en égalant le travail externe et le travail interne :

$$\frac{plL^2}{4} + \frac{kpl^2L}{4} = 4M_{uL} + 4M'_{uL} + 4kM_{ul} + 4kM'_{ul}$$
$$+ 2km_{ul}.L + 2km'_{ul}.L + 2m_{uL}.l + 2m'_{uL}.l$$

Dans les expressions ci-dessus :

k est un coefficient qui limite le rapport $\frac{\Phi_u}{\Phi_y}$ des poutres et des dalles dans les 2 directions principales. Si on a $k = 1$ les courbures de l'état ultime varient dans la section médiane comme $\frac{L}{2}$ et $\frac{l}{2}$ respectivement dans les directions AB et BC. Il faut donc vérifier que ce rapport reste compris entre des limites raisonnables.

M_{uL}, M'_{uL}. M_{ul}, M'_{ul} sont respectivement les moments ultimes sur appuis et en travée dans les poutres AB, DC, BC, AD.

m_{uL}, m'_{uL}, m_{ul}, m'_{ul} sont respectivement les moments ultimes par unité de longueur sur appuis et en travée, dans les dalles, dans les directions BC et AB.

Ainsi avec $k = 1$:

$$\frac{plL^2}{8} + \frac{pLl^2}{8} = 2M_{uL} + 2M'_{uL} + 2M_{ul} + 2M'_{ul} + m_{ul}L + m'_{ul}.L + m_{uL}.l + m'_{uL}.l$$

ou bien : $\frac{plL^2}{8} = 2M_{uL} + 2M'_{uL} + m_{uL}.l + m'_{uL}.l$ (direction L) (fig. I.87*c*)

et : $\frac{pLl^2}{8} = 2M_{ul} + 2M'_{ul} + m_{ul}.L + m'_{ul}.L$ (direction l)

Ces expressions signifient qu'à l'état limite ultime, le moment isostatique dans les directions AB et BC doit être équilibré par la somme des moments ultimes sur appui et en travée des poutres et de la dalle, dans chacune des deux directions principales. (Art. 8,2 de l'annexe F_4 du B.A.E.L.).

Notons que pour $k = 0$ les appuis AD, BC sont infiniment rigides. La dalle porte alors sur deux appuis de sorte que la vérification n'est à faire que dans la direction AB.

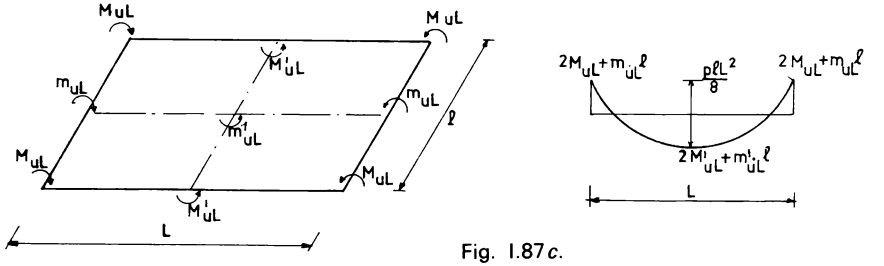


Fig. I.87*c*.

A l'équilibre ultime obtenu dans la direction AB de portée L (voir figure ci-dessus), il y a lieu d'ajouter l'équilibre ultime dans la direction BC pour obtenir l'équilibre général de la dalle dans les deux directions.

La charge ultime p se déduit de cette superposition et peut ainsi être facilement calculée à partir des moments ultimes sur appuis et en travée dans chacune des deux directions (poutres + dalles).

Ces calculs sont valables pour $\frac{L}{l} \leqslant 2{,}5$.

Les calculs et la conclusion qui viennent d'être établis pour une dalle encadrée par quatre poutres peuvent aisément être étendus à un plancher-dalle où les quatre poutres du panneau sont remplacées par des poutres fictives intégrées dans l'épaisseur de la dalle.

Il suffit de se fixer une règle pour déterminer les dimensions des bandes porteuses et de considérer les panneaux comme des dalles portant sur les poutres noyées :

Quelle que soit le largeur choisie pour chaque élément de cette décomposition, on doit vérifier à l'état limite ultime et écrire dans chaque direction les conditions d'équilibre établies ci-dessus.

NOTA : Lorsque dans une plaque, les sollicitations ont été déterminées à partir de la théorie de l'élasticité, la trajectoire des contraintes ne correspond généralement pas à la direction des armatures qui y sont disposées. Le plus souvent, pour que l'exécution soit facilitée et qu'une superposition d'armature soit évitée, par suite de croisements trop nombreux, on adopte un réseau orthogonal d'armatures. Le problème qui peut se poser à l'Ingénieur est de déterminer le moment fléchissant M et l'effort normal N qui peuvent être effectivement introduits dans un plan formant un angle θ avec l'une des directions principales (*ox* ou *oy*). Cette étude a été effectuée par R. H. Wood, Professeur à l'Université de Warwick, qui à partir des équations fondamentales :

$$M = M_x \cos^2 \theta + M_y \sin^2 \theta - 2M_{xy} \sin \theta \cos \theta$$
$$N = N_x \cos^2 \theta + N_y \sin^2 \theta - 2N_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

a cherché le meilleur rendement dans la direction des armatures lorsque par exemple un programme de calcul permet d'obtenir $M_x M_y M_{xy} N_x N_y N_{xy}$.

9. Excentrement des charges verticales dans un portique soumis à des charges verticales et horizontales : possibilités de flambement à l'état limite ultime.

Supposons que nous ayons étudié les sections des poteaux et des poutres d'un portique à nœuds déplaçables, soumis à des charges verticales et horizontales, et, que nous ayons déterminé les moments ultimes M_{up} correspondant au mécanisme créé avant rupture (fig. I.88).

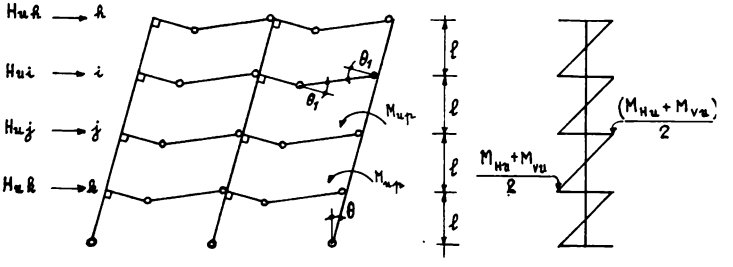


Fig. I.88.

Il y a lieu de vérifier l'équilibre ultime en tenant compte de la possibilité de flambement des poteaux par suite de l'excentrement des charges verticales. Pour cette étude, on peut se reporter au tome II de A. Fuentes, chapitre II.C4.

Les poteaux de longueur l sont ici soumis :

– aux charges verticales résultant de la descente des charges,

– à un moment fléchissant en tête et en pied, $\frac{M_{up}}{2}$ provenant du moment ultime M_{up} qui passe dans la rotule de la traverse.

Dans les poteaux, le moment fléchissant $\frac{M_{up}}{2}$ résulte :

– de l'effet des forces horizontales et des charges verticales qui créent des moments fléchissants $(M_{Hu} + M_{vu})$ aux nœuds du portique dans le mécanisme retenu,

– de l'excentricité a_{ij} des charges verticales N_u agissant sur la structure en état d'équilibre ultime (avec coefficient de majoration γ_s à définir suivant le règlement utilisé),

– de l'excentricité accidentelle $e_0 = \frac{l}{300}$ $\left(\text{le B.A.E.L. propose } \frac{l}{250}\right)$,

– de la déformation du second ordre $\frac{1}{r} \cdot \frac{l^2}{\pi^2}$ en admettant un point d'inflexion à mi-hauteur du poteau (fig. I.89).

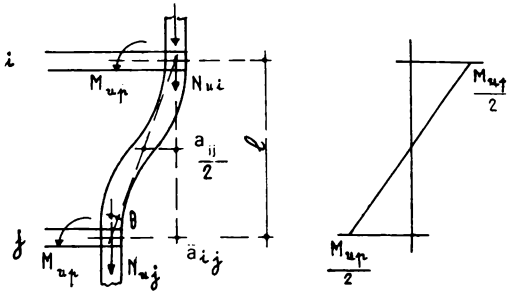


Fig. I.89.

La vérification de la section d'encastrement du poteau doit être effectuée en écrivant (fig. I.90) :

$$\frac{M_{up}}{2} = N_u(e + f) = N_u\left(\frac{M_v + M_H}{2N_u} + \frac{a_{ij}}{2} + e_0 + \frac{1}{r}\frac{l^2}{\pi^2}\right)$$

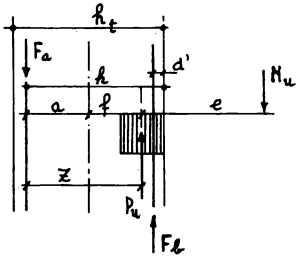


Fig. I.90.

d'où les deux équations d'équilibre ultime de la section :

$$N_u + F_a = P_u + F_b$$
$$N_u(e + f + a) = P_u \cdot Z + F_b(h - d')$$

Notons qu'en utilisant la règle de l'équilibre, avec les deux conditions :

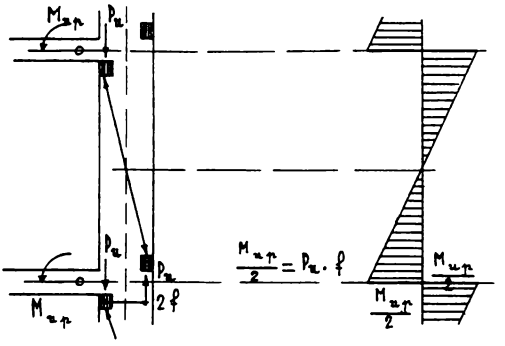
$$e_i = \frac{h_t}{2} - \frac{P_u}{2b \cdot \sigma'_b} = f$$

et $\varepsilon_b \leqslant 3{,}5\ ^0/_{00}$ (charges instantanées)

le travail interne dans le poteau est parfaitement mis en évidence sur la figure I.91 :

Les sections choisies lors du prédimensionnement doivent satisfaire à toutes les vérifications ci-dessus, après majoration des forces verticales et horizontales, comme imposé à l'état limite ultime.

Fig. I.91.



10. Actions cycliques:

A partir du diagramme bilinéaire, l'effet des actions réversibles nous conduirait au diagramme moment-courbure de la figure I.92 ci-dessous:

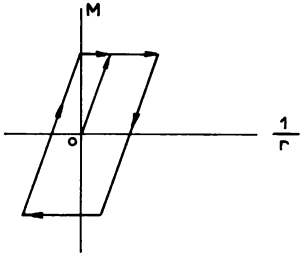
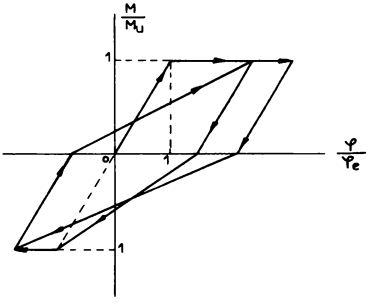


Fig. I.92.

En fait, sous des actions réversibles et répétées (actions cycliques) il y a un affaiblissement de la rigidité qui entraîne une augmentation de la période de vibration et modifie la réponse de la structure de sorte que le diagramme moment-courbure peut être, selon Clough, représenté sous la forme suivante (fig. I.93):

Fig. I.93.



L'affaiblissement de la rigidité provient en particulier de la chute de la contrainte d'adhérence consécutive à la détérioration du béton, et en outre, des

effets néfastes de la pénétration, dans la zone comprimée, des fissures d'effort tranchant.

On conçoit aisément que, dans une pièce armée sur les deux parements perpendiculaires au plan de la déformation, l'inversion de l'effort ne contribue pas à refermer totalement les fissures car la déformation plastique de l'acier gêne la fermeture de ces fissures, et, c'est l'acier comprimé qui s'oppose d'abord aux efforts de compression. Au moment où l'acier reprend à lui seul toutes les compressions (s'il ne flambe pas) la rigidité de la pièce ne correspond qu'à la seule rigidité des armatures dans les sections où la pièce est entièrement fissurée. Lorsque l'acier atteint sa limite élastique en compression, la fissure se referme dans la zone comprimée et la rigidité augmente légèrement par rapport à la phase précédente où la déformation avait augmenté à moment constant.

On conclut de toutes ces considérations que les angles du portique doivent être armés avec le plus grand soin, après vérification de la contrainte des bielles, au droit du nœud (fig. I.94).

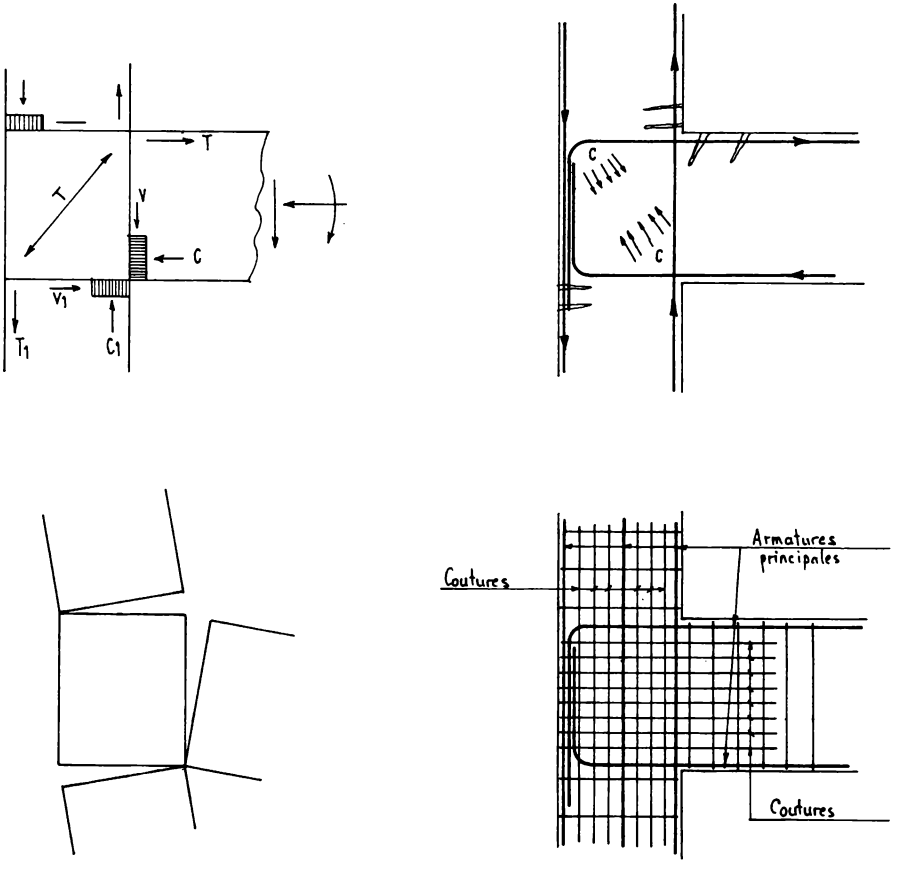


Fig. I.94.

11. Conclusion

L'étude qui vient d'être faite met d'abord en évidence l'erreur qui peut être commise en utilisant strictement les règles de la résistance des matériaux dans l'étude des déformations des structures en béton armé, si, au-delà de la fissuration du béton, le projeteur fait intervenir la totalité des sections de béton (aires, inerties, moments statiques) et si, la plus grande attention n'est pas portée sur les modules d'élasticité du béton, ses déformations différées* et son diagramme contrainte-déformation.

Dans la déformation d'un élément en béton armé on peut apprécier correctement l'étape au cours de laquelle cette déformation reste dans le domaine élastique ($\sigma'_j \leqslant 0{,}5 f_{cj}$ et $\sigma_j \leqslant 1{,}5 f_{tj}$). On peut apprécier également son état de résistance et son déplacement ultimes en définissant un mécanisme de rupture dont les rotules plastiques correspondent à un rapport Φ_u/Φ_y (de la courbure à l'état limite ultime à la courbure dans le système élastique) restant dans les limites admissibles ($\Phi_u/\Phi_y \leqslant 10$). Entre la fin de l'état purement élastique et la rupture, une étape intermédiaire existe pour laquelle le calcul des déformations reste douteux.

En effet, par suite de la fissuration, la variation du facteur EI entraîne une redistribution des moments fléchissants dans les structures hyperstatiques. Dans ces structures, et au cours de cette étape intermédiaire, *l'adaptation plastique* du béton *permet de fixer a priori*, dans des limites raisonnables, la valeur *des moments fléchissants*. Avec ses règles simplifiées de calcul des moments sur appuis, A. Caquot fut l'un des premiers à mettre à profit cette particularité du béton armé. Le calcul des déformations reste cependant très complexe.

Ainsi, dans une structure de bâtiment prévue pour résister en phase d'utilisation à des efforts horizontaux (vent ou séisme), la grande difficulté est de savoir calculer les déplacements des différents éléments (voiles pleins, portiques, murs à files d'ouvertures, etc...) qui composent cette structure, et d'écrire la compatibilité de ces déplacements. Les voiles pleins peuvent, par exemple, rester dans un domaine purement élastique alors que les nœuds des portiques ont déjà atteint l'étape élasto-plastique. Dans cette étape, la rigidité peut être recherchée par itération, à partir d'un système purement élastique; c'est sans doute un calcul long et coûteux, mais nécessaire.

Dans l'étude d'un élément du type portique ou refend à files d'ouvertures, devant résister à des efforts horizontaux, une bonne approximation, basée sur le critère de résistance à l'état limite ultime, peut consister à rechercher la limite supérieure de l'étape purement élastique ainsi que le mécanisme de rupture le plus probable par flexion (en supposant sa possibilité de résistance à l'effort tranchant jusqu'à cette phase). On obtient alors (fig. I.95) :

(*) Voir en annexe les règles A.C.I. sur le retrait et le fluage.

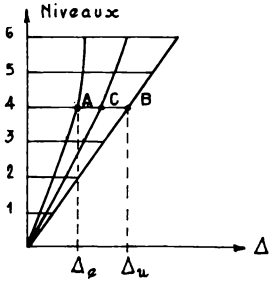
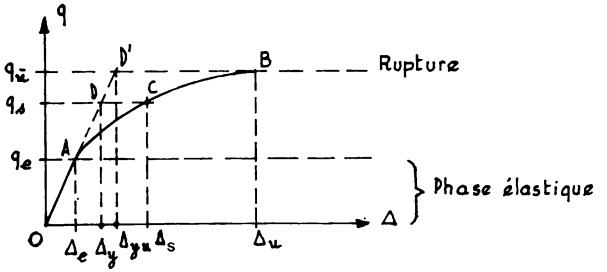


Fig. I.95. — Flèche de l'élément étudié.

— pour chaque niveau un déplacement en phase purement élastique Δ_e et un déplacement ultime Δ_u (points A et B),

— l'effort maximal q_e qui conduit au plus grand déplacement de l'étape élastique ainsi que l'effort q_u entraînant le mécanisme de rupture, à l'étage considéré.

On trace sur le diagramme effort-déplacement de chaque niveau les points tels que A et B, qu'on joint par une parabole tangente en A à OA, et, on lit directement le déplacement de l'élément étudié sous l'effet de l'effort de service q_s tel que $\gamma_s q_s = q_u$ (γ_s étant le coefficient de sécurité liant la charge de service à la charge de rupture) (fig. I.96).



ductilité * $= \dfrac{\Delta_u}{\Delta_y}$

Fig. I.96.

Les points C, reportés sur le diagramme de déplacement des différents niveaux, donnent une approximation des déplacements Δ_s de l'élément sous charge de service.

Ainsi à partir d'un mécanisme de rupture et *du dimensionnement correspondant à* $\gamma_s \cdot q_s = q_u$ il est simple d'obtenir d'abord le déplacement Δ_u, puis d'en déduire le déplacement purement élastique Δ_e sous q_e (dans cette phase, on fait intervenir la section totale homogénéisée de chaque élément), et enfin, de définir approximativement le déplacement de service Δ_s sous charge q_s.

En pratique, on peut constater que q_e n'est pas un effort négligeable, même si f_{tj} est voisin de 2,5 MPa. En effet à l'état limite ultime le dimension nement est déduit des conditions de non flambement des poteaux du portique soumis à toutes les sollicitations verticales et horizontales, et nous avons vu que cette vérification est très sévère.

(*) La contrainte 0,5 f_{cj} devrait limiter supérieurement Δy.

Il y a lieu de noter qu'en considérant que le système étudié reste dans un domaine *purement élastique* sous q_s (point D et déplacement Δ_y) nous sommes tenus par la règlementation actuelle, de vérifier les sections à l'état limite ultime sous q_u (point D' et déplacement Δ_{yu}). Cette façon de procéder fait commettre une erreur sur la distribution des moments fléchissants sous charge d'utilisation (redistribution à partir du point A) mais grâce à l'adaptation plastique du béton cette erreur n'est pas grave. Par contre, si dans l'étude du contreventement d'un bâtiment dont la structure est composée d'éléments différents tels portiques et refends (avec et sans files d'ouvertures), on écrit la compatibilité des déplacements en se servant du déplacement Δ_y, on peut être conduit à surestimer les efforts appliqués à l'élément considéré qui a atteint l'étape élasto-plastique au détriment des éléments voisins restés ou non en phase élastique et, on peut commettre ainsi une erreur importante surtout si les charges horizontales extérieures correspondent à un séisme (l'erreur est beaucoup moins grave s'il s'agit du vent car les éléments les plus résistants sont souvent surdimensionnés sous charges verticales, et reprennent aisément les efforts horizontaux relativement faibles).

Les bâtiments construits en zone sismique, et les bâtiments élevés, pour lesquels on désire apprécier le déplacement en tête (pour des raisons de confort) devraient être contreventés par des éléments de structure obéissant à *la même loi de déformation* sous les efforts horizontaux, soit :

- des voiles pleins et noyau, uniquement
- des refends à files d'ouvertures, uniquement
- des portiques, uniquement

afin de mieux apprécier la répartition des efforts (en évitant au maximum les effets de torsion d'ensemble).

Les systèmes mixtes peuvent en effet conduire à des erreurs non négligeables si le projeteur se contente d'écrire la compatibilité des déplacements des différents éléments de la structure calculés à partir des sections totales de béton *, *sans tenir compte de la redistribution des moments fléchissants et surtout des changements de rigidité enregistrés* dans les barres de chaque système (après fissuration et compte tenu de leur ferraillage respectif). L'analyse du mécanisme de rupture devrait permettre d'apprécier si un système ne risque pas d'être épuisé avant l'autre, entraînant ainsi la ruine de ce dernier s'il ne peut pas supporter la totalité de l'effort ultime. Citons à ce propos l'A.C.I. qui par mesure de prudence, prend la totalité du séisme sur les éléments les plus rigides (voiles pleins) et en applique en outre 25 % sur les portiques (par exemple) *parce qu'ils sont beaucoup plus flexibles.*

En ce qui concerne les portiques, rappelons que dans le cas de séïsme, la ductilité (voir A. Fuentes. Tome II chapitre III.C) permet d'obtenir une période de vibration plus longue et un coefficient de réponse plus faible, autorisant des efforts horizontaux plus importants que ceux qui correspondraient à un comportement purement élastique.

(*) Valable au stade de l'avant projet et du pré-dimensionnement.

En tenant compte, dans le calcul du béton armé, du comportement élasto-plastique des éléments de structure, c'est-à-dire de l'étape comprise entre l'état purement élastique et l'état de rupture, le projeteur adopte une position certainement plus réaliste que celle, trop souvent admise qui consiste généralement à faire une étude en phase élastique et à procéder à une vérification à l'état limite ultime sur la base du dimensionnement déduit des règles de la Résistance des Matériaux.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. TICHY, J. RAKOSNIK. — *Calcul plastique des ossatures en béton.* Eyrolles, 1975.
[2] J.COURBON — *Résistance des Matériaux.* (Tome 2), Dunod, 1971.
[3] J. FAUCHART. — *Initiation au calcul des structures.* Eyrolles, 1975.
[4] FUENTES - Tome I et II. Eyrolles, 1975-1978.

ANNEXE 1

Méthode de l'A.C.I., pour le calcul du fluage

Outre les formules proposées par le C.E.B. – Bulletin 117 – pour estimer la déformation différée du béton sous contrainte constante, il est intéressant de noter la méthode préconisée par l'A.C.I. (American Concrete Institute) pour déterminer le coefficient de fluage

$$C_t = C_u . K_t . K_{ag} . K_h . K_e . K_s . K_f . K_{ai},$$

relation dans laquelle C_u est un coefficient de valeur moyenne 2,35,
K_t est fonction du temps (en jours) pendant lequel s'exerce le chargement

$$K_t = \frac{t^{0,6}}{10 + t^{0,6}}$$

t s'exprime en jours, de sorte que K_t a respectivement pour valeurs 0,44 – 0,60 – 0,69 – 0,78 et 0,90 pour t = 30 jours – 90 jours – 180 jours – 365 jours et 1 800 jours;
K_{ag} est fonction de l'âge du béton à la mise en charge et a pour expression $1{,}25t^{-0{,}118}$ pour un béton qui durcit sans étuvage à une température voisine de 15°,
et $1{,}13t^{-0{,}095}$ pour un béton étuvé
les valeurs de K_{ag} (où t s'exprime en jours) sont ainsi :

– *pour un béton qui durcit sans étuvage :*

j	7	10	30	90
K_{ag}	1	0,95	0,83	0,74

– *pour un béton étuvé :*

j	1 à 3	10	30	90
K_{ag}	1	0,90	0,82	0,74

K_h est le coefficient d'humidité relative :

$$K_h = 1{,}27 - 0{,}0067\,H \qquad \text{pour } H > 40\ \%$$

H indique le pourcentage d'humidité relative

$K_h = 1$	0,87	0,73	0,60
pour $H = 40\ \%$	60 %	70 %	100 %

K_e est un coefficient dépendant de l'épaisseur de la pièce;

$K_e = 1$ pour une épaisseur maximale de 15 cm,

$K_e = 0{,}82$ pour une épaisseur égale ou supérieure à 30 cm.

K_s est un coefficient qui dépend de la mesure obtenue au slump test, et prend les valeurs suivantes :

0,95 pour 5 cm
1,00 pour 6 cm
1,02 pour 7,5 cm
1,09 pour 10 cm
1,16 pour 12,5 cm

K_f correspond au poids d'éléments fins entrant dans la composition du béton. On prend :

0,95 pour 30 % d'éléments fins
1,00 pour 50 % d'éléments fins
1,05 pour 70 % d'éléments fins.

K_{ai} est un coefficient qui fait intervenir le pourcentage d'air contenu dans le béton; sa valeur est :

1 pour 6 % ou moins de 6 %
1,09 pour 7 %
1,17 pour 8 %

Les adjuvants ne sont pas pris en compte lorsque le dosage du béton varie entre 250 et 400 kg/m^3.

ANNEXE II

Méthode de l'A.C.I. pour le calcul du retrait

Comme pour le fluage, on retrouve, dans l'expression du raccourcissement du retrait libre, plusieurs paramètres notés comme suit par l'A.C.I. :

$$\varepsilon_r = 0{,}0008 . R_t . R_h . R_e . R_s . R_f . R_{ai} . R_d \quad \text{(raccourcissement relatif)}$$

où R_t est un coefficient qui s'exprime en fonction du temps t (en jours) :

par $$R_t = \frac{t}{35 + t}$$

pour les bétons qui durcissent normalement à une température de l'ordre de 15°; t est le temps en jours après les 7 premiers jours de bétonnage et on a la correspondance suivante :

$R_t = 0{,}46$	0,72	0,84	0,91	0,98
pour $t = 30$	90	180	365	1 800

et pour les bétons étuvés $R_t = \frac{t}{55 + t}$ expression où t est la durée en jours après le premier jour de bétonnage.

$R_t = 0{,}35$	0,62	0,77	0,87	0,97
pour $t = 30$	90	180	365	1 800

R_h est un coefficient qui dépend de l'humidité relative H :

$R_h = 1{,}4 - 0{,}01H$ pour $40 < H < 80\ \%$
ou $R_h = 3{,}00 - 0{,}03H$ pour $80 < H < 100\ \%$

$R_h = 1$	0,80	0,60	0
pour $H = 40$	60	80	100

R_e dépend de l'épaisseur e de la pièce

$R_e = 1$ pour $e \leqslant 15$ cm

et $R_e = 0{,}84$ pour $e \geqslant 23$ cm

(on peut interpoler pour des épaisseurs intermédiaires).

R_s dépend des résultats du « slump test »; ses valeurs sont :

0,97 pour 5 cm
1 pour 7 cm
1,01 pour 7,5 cm
1,05 pour 10 cm
1,09 pour 12,5 cm

R_f correspond au poids d'éléments fins entrant dans la composition du béton; on prend :

0,78 pour 33 %
0,86 pour 40 %
1 pour 50 %
1,04 pour 70 %

R_{ai} est un coefficient qui fait intervenir le pourcentage d'air contenu dans le béton. Il vaut :

0,98 pour 4 %
1 pour 6 %
1,03 pour 10 %

R_d dépend du dosage du béton : on lui donne les valeurs suivantes :

0,87 pour 225 kg/m^3
0,95 pour 335 kg/m^3
1 pour 420 kg/m^3
1,09 pour 550 kg/m^3

Exemple : Retrait libre d'une pièce non étuvée de 23 cm d'épaisseur estimé 5 ans après son bétonnage, sous une humidité relative de 60 %. Le résultat du « slump test » indique 7,5 cm pour ce béton dosé à 350 kg/m^3 composé avec 34 % d'éléments fins et contenant 5 % d'air.

Finalement :

$$\varepsilon_r = 0{,}0008 \times 0{,}98 \times 0{,}8 \times 0{,}84 \times 1{,}01 \times 0{,}78 \times 0{,}99 \times 0{,}96 = 3{,}9 \,.\, 10^{-4}$$

CHAPITRE II

L'EFFORT TRANCHANT

A) ÉTAT DE SERVICE

DÉFINITION DES ARMATURES TRANSVERSALES DANS UNE PIÈCE EN BÉTON ARMÉ

Le calcul des armatures principales (c'est-à-dire celles qui sont dirigées parallèlement à l'axe de la pièce) ne fait intervenir que le moment fléchissant dans le cas de la flexion simple, ou bien le moment fléchissant et l'effort normal dans le cas de la flexion composée.

Les armatures transversales qui relient la membrure comprimée à la membrure tendue, sont déterminées à partir de l'effort tranchant, qui a également une certaine influence sur la longueur des armatures longitudinales par suite de l'intervention du béton de l'âme de la poutre.

1. Rappel de résistance des matériaux

L'effort tranchant tend à faire glisser, l'une par rapport à l'autre, les deux parties d'une pièce situées de part et d'autre de la section considérée. Il en résulte une contrainte tangentielle; cette même contrainte s'exerce dans la section parallèle à la fibre moyenne et perpendiculaire à la section transversale (théorème de Cauchy).

a) *Matériau homogène :*

Dans une section symétrique par rapport à un axe vertical d'une pièce constituée d'un matériau homogène, soumise à un effort tranchant V la contrainte

de cisaillement au niveau y par rapport à l'horizontale du centre de gravité s'exprime par la formule :

$$\tau = \frac{V \,.\, S(y)}{I \,.\, b(y)} \qquad \text{(fig. II.1)}$$

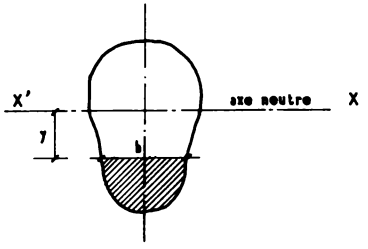


Fig. II.1.

Fig. II.2.

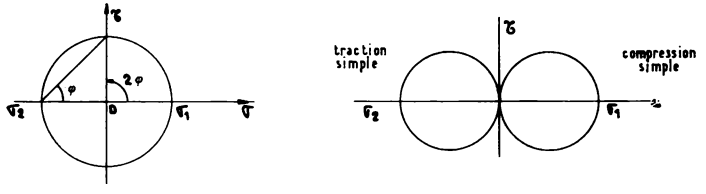


Fig. II.3.

où $S(y)$ représente le moment statique, par rapport à l'axe x'x de la partie de la section située d'un même côté de la parallèle à cet axe (aire hachurée sur la figure II.1).

$b(y)$ est la largeur horizontale de la section au niveau considéré.

I est le moment d'inertie de la section droite de la pièce par rapport à $x'x$.

La contrainte ainsi calculée varie dans la hauteur de la section; pour une poutre de section rectangulaire, la variation de contrainte est parabolique, avec un maximum au niveau du centre de gravité (fig. II.2.b).

En flexion simple la recherche des contraintes principales, conduite par exemple au moyen du cercle de Mohr, permet de vérifier que l'angle φ donnant l'inclinaison des contraintes principales, au niveau du centre de gravité, est égal à $\frac{\pi}{4}$ puisque la contrainte normale y est nulle (fig. II.3.a).

Sur les fibres extrêmes, où la contrainte tangentielle est nulle, la représentation de Mohr nous fait passer du cercle de compression simple sur la membrure comprimée, à celui de traction simple sur la fibre tendue (fig. II.3 *b*)

– sur la fibre comprimée : $\sigma_x = \dfrac{M \cdot V}{I}$ et $\tau = 0$

d'où $\sigma_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_x$ et $\varphi = 0$

– sur la fibre tendue : $-\sigma_x = -\dfrac{MV}{I}$ et $\tau = 0$

d'où $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -\sigma_x$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

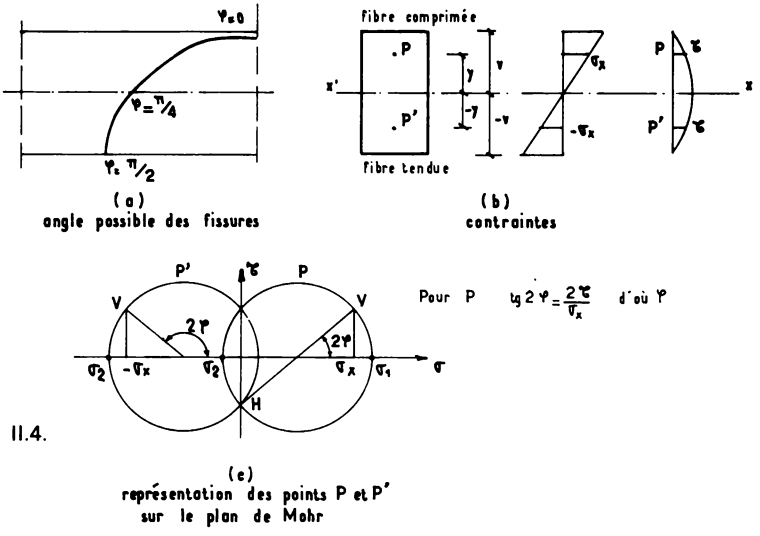


Fig. II.4.

Si la fissuration intervient on admet qu'elle se produit suivant un plan normal à la contrainte principale de traction. Il est donc possible de déterminer l'angle probable de fissuration φ en deux points P et P' symétriques par rapport à $X'X$ représentés dans la section rectangulaire de la figure II.4 *b*.

b) *Cas du béton armé :*

Le béton résiste mal aux contraintes de traction, car sa résistance à la rupture par traction est environ 12 à 13 fois plus faible que sa résistance à la compression. Sous l'effet du moment fléchissant, le béton se fissure donc dans la zone tendue. Il se fissure également dans les zones d'extrêmité, dès que la contrainte principale de traction y atteint la résistance de rupture*.

(*) En fait, en raison de l'intervention de la plasticité en traction, on s'aperçoit que la fissuration intervient lorsque la contrainte de traction est environ 1,5 fois plus grande (c'est le même phénomène qui fait que la contrainte de traction déduite de la rupture d'un prisme par flexion est 1,5 à 1,6 fois plus grande que la contrainte de rupture par traction simple).

Avant fissuration, la contrainte de cisaillement est celle d'un matériau homogène : (fig. II.5).

Après fissuration, le diagramme donnant la contrainte tangente ne peut plus être représentée de la même façon que pour un matériau homogène.

Compte tenu de la non intervention du béton tendu, la section de la poutre en béton armé se présente comme formée de deux membrures séparées, comme l'indique le diagramme des contraintes normales figuré ci-dessous (fig. II.6) :

Fig. II.5.

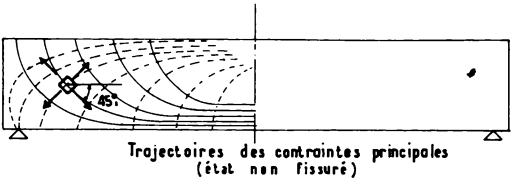
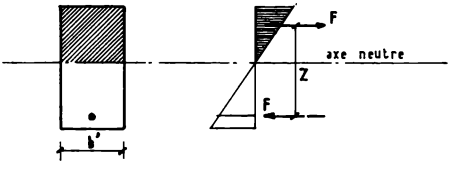


Fig. II.6.



L'effort tranchant tend à faire glisser horizontalement ces deux membrures l'une par rapport à l'autre. Dans un matériau homogène nous venons de voir que la valeur de cette contrainte de glissement correspondait, sur toute la hauteur de la section à :

$$\tau = \frac{V \,.\, S(y)}{I \,.\, b(y)}$$

En Béton Armé, cette formule reste valable dans toute la partie comprimée mais dans la membrure tendue, en posant $\frac{I}{S(x'x)} = Z$ (bras de levier du couple élastique), la contrainte de cisaillement s'exprime par la formule :

$$\tau = \frac{V}{Z \,.\, b(y)}$$

Le glissement $\frac{V}{Z}$ est donc constant entre l'axe neutre et les armatures tendues, alors que la contrainte de cisaillement varie en fonction de l'épaisseur de l'âme (voir sur la figure II.7 le cas de la poutre en T).

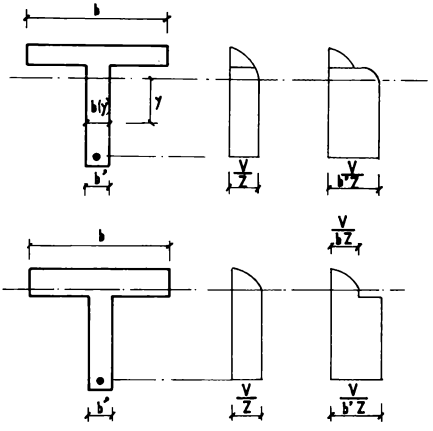


Fig. II.7.

La contrainte de cisaillement, ainsi déterminée dans le cas où la poutre est fissurée, correspond à une fiction commode, mais elle n'a pas de réalité physique. Malgré son caractère fictif, la connaissance de la contrainte τ a un grand intérêt, car elle caractérise le degré de sollicitation du béton.

2. Analogie d'une poutre en béton armé et d'une poutre en treillis

La pièce en béton armé fissurée comprend une membrure comprimée et une membrure tendue. La fissuration se traduit dans la hauteur de l'âme par l'existence de bielles comprimées obliques, et pour assurer l'équilibre de ce système, il est nécessaire de prévoir des montants tendus comme s'il s'agissait d'une poutre à treillis (Poutre Howe dans le cas d'armatures d'âme perpendiculaires à la fibre moyenne de la pièce, ou poutre Warren dans le cas d'armatures inclinées sur cette fibre) (fig. II.8).

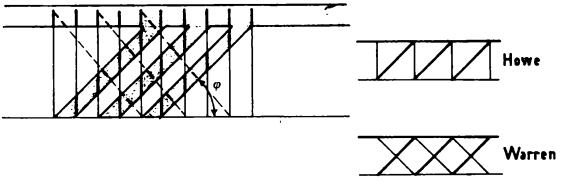


Fig. II.8.

Dans le cas le plus général, en appelant :

φ l'angle des bielles avec l'horizontale.
α l'angle des armatures transversales avec l'horizontale.

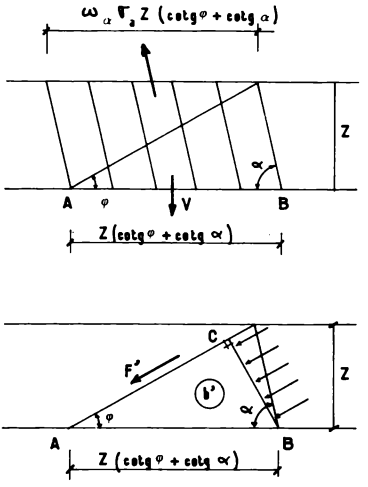


Fig. II.9.

La contrainte dans les bielles peut être déterminée en écrivant que la résultante des contraintes de compression des bielles, projetée sur la verticale, équilibre l'effort tranchant V, soit :

$$F' \sin \varphi = V$$

avec :

$$BC = Z(\text{cotg } \varphi + \text{cotg } \alpha) \sin \varphi = Z \frac{\sin (\varphi + \alpha)}{\sin \alpha}$$

d'où :

$$\sigma'_b = \frac{V \sin \alpha}{b' . Z \sin \varphi . \sin (\varphi + \alpha)}$$

D'autre part, en appelant ω_α la section d'armatures transversales par unité de longueur, on a :

$$V = \omega_\alpha . \sigma_\alpha . Z(\text{cotg } \varphi + \text{cotg } \alpha) \sin \alpha$$

soit

$$V = \omega_\alpha . \sigma_\alpha . Z . \frac{\sin (\varphi + \alpha)}{\sin \varphi}$$

En adoptant : $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

on trouve : $$\sigma'_b = \frac{2V . \sin \alpha}{b' . Z(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{2V}{b' . Z(\text{cotg } \alpha + 1)}$$

et

$$V = \omega_\alpha . \sigma_\alpha . Z(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

L'inclinaison des armatures transversales qui cousent les bielles à 45° varie de :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{à} \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

— pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (cas général de $\varphi = \frac{\pi}{4}$)

$$\sigma'_b = \frac{2V}{b' . Z} = 2\tau$$

et

$$\omega_\alpha . \sigma_\alpha = \frac{V}{Z}$$

ou bien si t est la distance horizontale de cours d'armatures transversales de section A_t :

$$\frac{A_t}{t} . \sigma_\alpha = \frac{V}{Z}$$

— pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\sigma'_b = \frac{V}{b'Z} = \tau$$

et

$$\omega_\alpha . \sigma_a = \frac{V}{Z\sqrt{2}}$$

ou

$$\frac{A_t}{t} . \sigma_a = \frac{V}{Z\sqrt{2}}$$

L'analogie du treillis composé de bielles à 45° et d'armatures transversales d'angle α variable de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$ présente l'avantage d'une grande simplicité d'utilisation et permet, en outre, d'étudier avec clarté la superposition du moment fléchissant et de l'effort tranchant.

3. Influence de la fissuration d'effort tranchant sur la flexion (fig. II.10)

Dans l'hypothèse de l'existence de bielles et d'armatures transversales inclinées respectivement de φ et de α sur l'horizontale, étudions les efforts F_s et F_i appliqués aux membrures supérieure et inférieure lorsque la section est soumise simultanément au moment fléchissant M et à l'effort tranchant V.

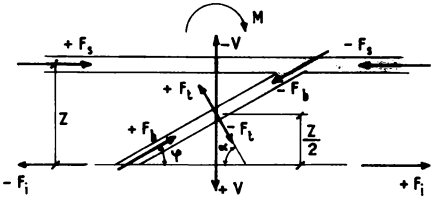


Fig. II.10.

Les deux équations d'équilibre sont :

$$F_s + F_i = \frac{2M}{Z} \tag{1}$$

$$F_s - F_i + F_b \cos \varphi - F_t \cos \alpha = 0 \tag{2}$$

En remarquant que $F_b \sin \varphi = F_t \sin \alpha = V$, on obtient

$$F_s - F_i + V \operatorname{cotg} \varphi - V \operatorname{cotg} \alpha = 0 \tag{2}$$

ou

$$F_s = F_i - V(\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \alpha)$$

ce qui donne pour (1)

$$2F_i = \frac{2M}{Z} + V(\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \alpha)$$

soit

$$F_i = \frac{M}{Z} + \frac{V}{2}(\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \alpha)$$

$$F_s = \frac{M}{Z} - \frac{V}{2}(\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \alpha)$$

on constate ainsi qu'il y a lieu de tenir compte, dans la section étudiée, d'un moment additionnel :

$$\frac{VZ}{2}(\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \alpha) = \Delta M$$

Le moment $(M + \Delta M)$ est celui qui règne à une distance ΔX de la section, telle que :

$$\Delta X = \frac{Z}{2}(\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \alpha),$$

car

$$\frac{\Delta M}{\Delta X} = V$$

Nous sommes ainsi amenés à décaler, vers le point de moment nul, la courbe du moment fléchissant d'une valeur :

$$\Delta X = \frac{Z}{2}(\operatorname{cotg} \varphi - \operatorname{cotg} \alpha)$$

En supposant que $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ce décalage est égal à $\frac{Z}{2}$. Cette valeur n'est pas dans le sens de la sécurité car les essais ont montré que φ était inférieur à $\frac{\pi}{4}$ au voisinage des appuis *. Dans l'hypothèse où $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$ on aurait $\Delta X = 0$.

(*) Voir ci-après les résultats d'essais effectués au cours de ces dernières années.

NOTA : En travée, lorsque le moment fléchissant est maximal, l'effort tranchant est nul, de sorte que l'effort maximal dans l'armature tendue est : $F_{max} = \frac{M_{max}}{Z}$. Ceci confirme que l'influence de la fissuration d'effort tranchant correspond simplement à un décalage, par translation horizontale, de la courbe des moments, sans augmentation de la valeur maximale de M.

a) *Sur un appui simple*, le moment fléchissant est nul ; l'effort dans l'armature tendue correspond toujours à $V_{appui} . \cotg \varphi$ quelle que soit la pente α des armatures transversales, à moins que des dispositions spéciales ne soient prises à l'about de la poutre.

On remarque, en effet, que pour être certain d'assurer l'intégrité de la bielle d'appui, il est préférable d'ancrer les cadres et étriers au-delà de la ligne AB (fig. II.11, II.12). Cet ancrage impose la formation de bielles élémentaires parallèles à la bielle d'appui et équilibrées par des armatures horizontales distribuées sur la hauteur de la poutre ; les armatures horizontales sont également ancrées à partir de la ligne AB.

Nous verrons également que ces armatures peuvent aussi reprendre les charges et surcharges appliquées à l'intérieur ou au-dessus du triangle ABC.

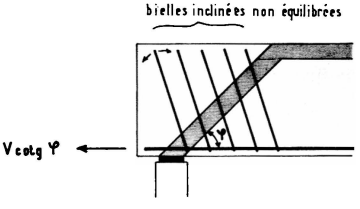


Fig. II.11.

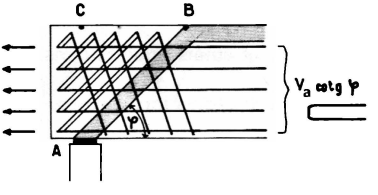


Fig. II.12.

Ainsi, même dans le cas où $\varphi = \alpha$, la somme des sections des armatures horizontales, rencontrées sur l'about de poutre, doit correspondre à :

$$V_{appui} . \cotg \varphi$$

b) *sur un appui de continuité*, on tient compte de la butée créée par la membrure comprimée sur l'appui considéré (fig. II.13).

L'effort à ancrer est ainsi :

$$V . \cotg \varphi + \frac{M_a}{Z}$$

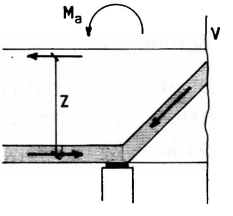


Fig. II.13.

(M_a est négatif ou plus exactement pris algébriquement).

Pour l'inclinaison des bielles, *on adopte généralement la valeur* $\varphi = \frac{\pi}{4}$ de sorte que, dans le cas des cadres et étriers verticaux, le décalage de la courbe des moments fléchissants est égal à $\frac{Z}{2}$; ce décalage est nul dans le cas de cadres et étriers inclinés à 45°.

On note encore que pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$ l'effort à ancrer sur l'appui libre est égal à V (les armatures longitudinales inférieures sont souvent prolongées jusqu'à l'appui pour reprendre la totalité de l'effort tranchant). Sur l'appui de continuité, l'effort à ancrer est égal à :

$$V + \frac{M_a}{Z}$$

Récapitulation

1° étriers et cadres verticaux $\alpha = \frac{\pi}{2}$

— contrainte dans les bielles $\frac{2V}{b'Z}$

— décalage de la courbe des moments $\frac{Z}{2}$

— cadres et étriers bouclés dans la membrure comprimée.

2° étriers et cadres inclinés $\alpha = \frac{\pi}{4}$

— contraintes dans les bielles $\frac{V}{b'Z}$

— pas de décalage de la courbe des moments

— cadres et étriers ancrés par un retour horizontal suffisant dans les membrures supérieure et inférieure.

En ce qui concerne l'utilisation de *barres relevées*, c'est-à-dire des barres disposées horizontalement dans la zone médiane d'une travée (où elles sont utilisées comme armatures de flexion) et qui, au lieu d'être interrompues lorsqu'elles ne sont plus nécessaires pour équilibrer la flexion, sont relevées, généralement à $\frac{\pi}{4}$ (de façon à coudre les fissures qui pourraient être provoquées par l'effort tranchant), nous ferons les remarques suivantes :

— leur section est souvent beaucoup plus importante que celle des armatures secondaires (étriers et cadres), elles conduisent ainsi à des efforts localisés importants dans le béton :

— La contrainte dans la bielle est déterminée en prenant en compte une zone beaucoup plus restreinte que dans le cas d'utilisation de cadres ou étriers de faible diamètre (fig. II.14 *a* et *b*), ce qui ne permet pas de coudre les fissures qui peuvent apparaître entre les bielles. Bien que reconstituant le schéma du treillis, la

figure II.14 *b* montre donc, qu'à intervalle de l'ordre de $2Z$, les barres relevées, utilisées seules comme armatures d'effort tranchant, peuvent conduire à une fissuration beaucoup plus précoce que dans le cas de la figure II.14 *a* et entraîner des fissures plus larges. Il faut donc : ou bien utiliser un système de barres relevées distantes au maximum de $\frac{Z}{2}$, ce qui permet à la fois de réduire la contrainte dans les bielles et de coudre les fissures éventuelles le long de ces bielles, ou bien utiliser un système mixte, barres relevées à $2Z$ au maximum, avec cadres verticaux ou inclinés, à faible intervalle. (La règle pouvant être d'attribuer aux barres relevées une reprise maximale de 50 % de l'effort tranchant) (fig. II.16).

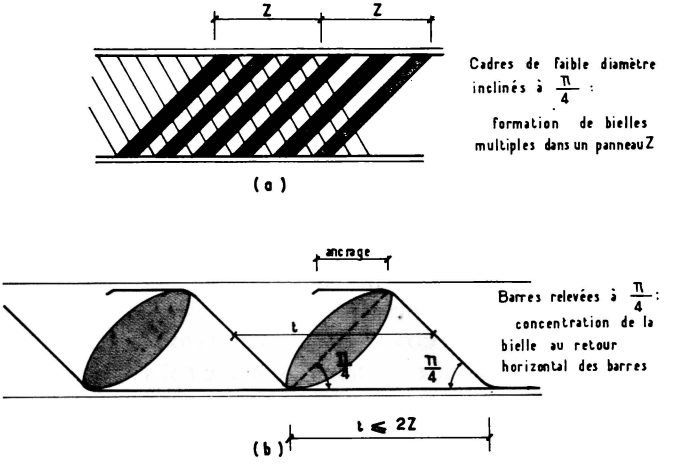


Fig. II.14.

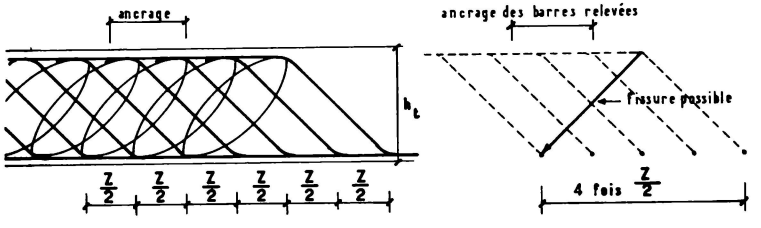


Fig. II.15.

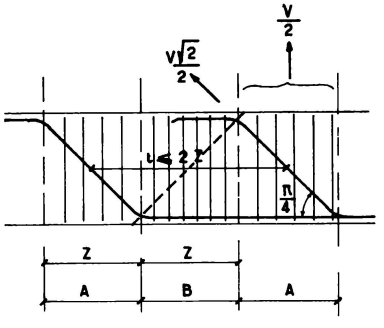


Fig. II.16.

– les barres relevées à l'intervalle $\frac{Z}{2}$ peuvent être calculées comme un système de cadres et étriers inclinés à $\frac{\pi}{4}$ ou plus généralement à α.

– les barres relevées à un intervalle compris entre $\frac{Z}{2}$ et $2Z$ peuvent reprendre une partie de l'effort tranchant, limitée dans cette zone à $\frac{V}{2}$, d'où leur section correspondant à $V\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Dans les zones A les cadres et étriers complémentaires doivent reprendre au minimum $\frac{V}{2}$ alors que dans la zone B les cadres et les étriers complémentaires doivent reprendre la totalité de l'effort tranchant **(fig. II.16).**

On remarque que la disposition indiquée sur la figure est telle qu'une fissure suivant le tracé en trait tireté n'intéresse aucune barre relevée et dans cette zone la totalité de l'effort tranchant doit être reprise par les seules armatures transversales courantes.

– les barres relevées distantes de Z peuvent aussi être complétées par un système de cadres et d'étriers inclinés avec la même pente que les barres relevées, ce qui permet de conduire les calculs comme s'il s'agissait d'une série de cadres et étriers inclinés, avec un intervalle plus important au droit de la barre relevée.

– au voisinage d'un appui simple d'une poutre, la dernière barre relevée, ou la dernière paire de barres relevées pourrait théoriquement être disposée de telle façon que sa partie supérieure soit située à la distance Z de l'axe de l'appui (fig. II.17).

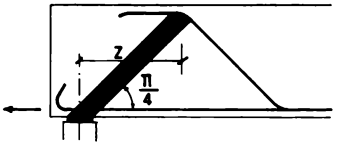


Fig. II.17.

Si les barres sont plus proches du bord libre de l'appui, on peut considérer qu'elles « relèvent » encore une partie de l'effort tranchant, à condition de compléter, le dernier panneau Z de la zone d'appui par des armatures horizontales équilibrant les bielles issues de l'ancrage des barres relevées dans la membrure supérieure (fig. II.18)

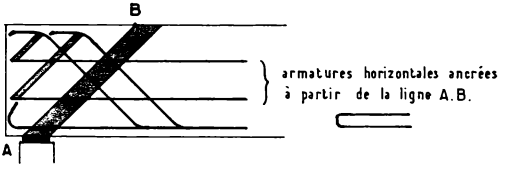
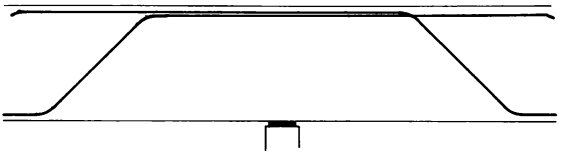


Fig. II.18.

– sur un appui continu, les barres relevées peuvent aussi servir de « chapeaux » dans deux travées contigües, pouvant ainsi entraîner l'économie d'acier correspondant à une longueur d'ancrage, pour le chapeau d'une part, pour la barre relevée d'autre part (fig. II.19).

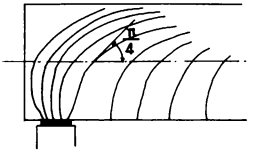
Fig. II.19.



4. Rôle de la bielle d'appui :

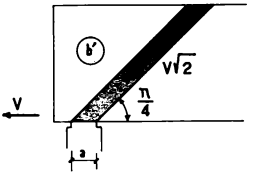
La figure II.20 donne une idée approximative du tracé des isostatiques de compression au voisinage d'un about de poutre (matériau homogène non fissuré reposant sur un appui simple). Dans la région voisine de l'extrémité, des bielles de béton comprimé convergent vers l'appui en formant un angle moyen voisin de $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe de la poutre.

Fig. II.20.



On admet généralement, à titre de simplification que l'équilibre est réalisé par une bielle unique, inclinée à $\frac{\pi}{4}$, dont la largeur correspond à celle de l'appui. Il est donc essentiel de vérifier que la contrainte de compression de la bielle n'est pas excessive (fig. II.21).

Fig. II.21.



Si b' est l'épaisseur de l'âme et a la largeur de l'appui, on peut écrire :

$$V\sqrt{2} = \sigma'_b \cdot b' \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{soit} \qquad \sigma'_b = \frac{2V}{a \cdot b'}$$

Dans le cas d'une articulation de faible largeur, cette contrainte peut-être relativement élevée. On peut alors élargir cette bielle d'appui soit en utilisant :

a) plusieurs nappes de frettage, qui épanouissent l'effort de compression apporté par l'appui et offrent une base plus large à la bielle inclinée à $\frac{\pi}{4}$ (cas de l'appui Freyssinet ou d'appuis en Néoprène, ou métalliques) (fig. II.22).

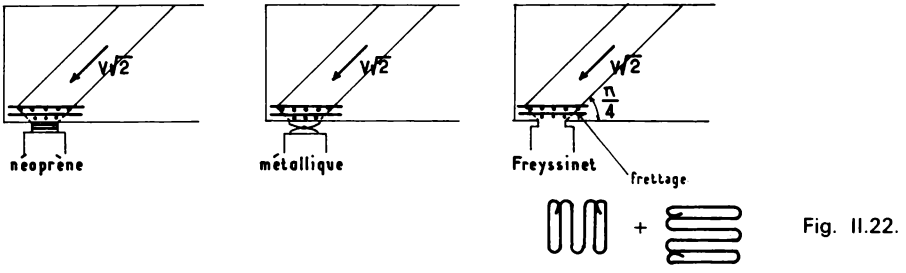


Fig. II.22.

Si V est l'effort tranchant au ras de l'appui, les barres inférieures doivent être prolongées suffisamment au-delà de celui-ci et être effectivement ancrées pour pouvoir supporter la traction V (fig. II.23).

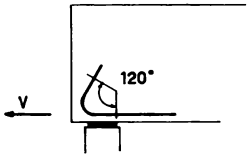


Fig. II.23.

L'ancrage des barres inférieures par un retour à $\frac{\pi}{2}$ n'est pas souhaitable en raison de la tendance des barres au dépliage, qui peut entraîner un décollement du béton à l'about de la poutre.

Si, toutefois une telle disposition devait être adoptée, il serait judicieux de prévoir au moins 2 attaches de faible diamètre (fig. II.24 *a*). Les retours de barres doivent, en outre, être inclinés si possible vers la masse du béton pour améliorer l'adhérence (fig. II-24 *b*).

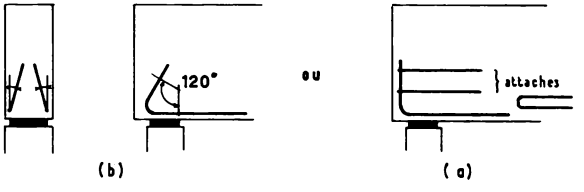


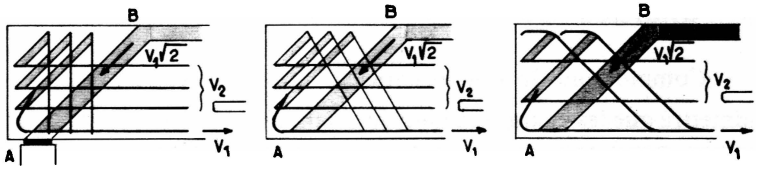
Fig. II.24.

b) Les bielles qui ont tendance à pousser au vide au-dessus de l'about de poutre. Ceci impose de prévoir des cadres verticaux ou inclinés (voire même des barres relevées), dans la zone d'appui, pour reprendre la partie d'effort tranchant

qui ne peut passer directement, sous contrainte autorisée, dans la bielle d'appui inclinée à $\frac{\pi}{4}$.

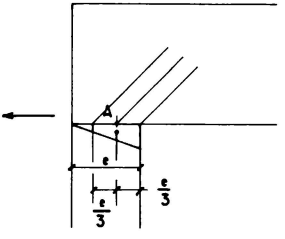
Si V_1 est la partie d'effort tranchant qui peut passer dans la bielle d'appui, et si V_2 est le complément d'effort tranchant restant à équilibrer, la section d'armatures secondaires à utiliser au-delà de la bielle d'appui doit correspondre à V_2. L'équilibre est réalisé si des barres horizontales de section suffisante sont prévues en about de poutre et ancrées au delà de la ligne AB (fig. II.25).

Fig. II.25.



REMARQUE : Lorsqu'une poutre repose directement sur un mur (façade d'un bâtiment) il est recommandé de considérer, en tête du mur, une répartition triangulaire des contraintes. La vérification de la bielle d'appui pourra être faite avec une largeur moyenne égale à $\frac{2e}{3}$ (fig. II.26).

Fig. II.26.



Si la contrainte sur le mur d'appui est excessive, il faut prévoir un frettage ou un sommier d'appui en béton armé permettant d'obtenir une meilleure répartition. Si la poutre est flexible, on pourra éviter l'épaufrure de l'arête intérieure du mur, en chanfreinant cette arête au droit de la poutre (fig. II.27).

Lorsqu'une poutre est solidaire d'un poteau (angle de portique), il y a lieu d'appliquer (fig. II.28) :

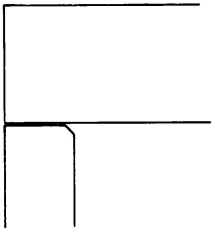


Fig. II.27.

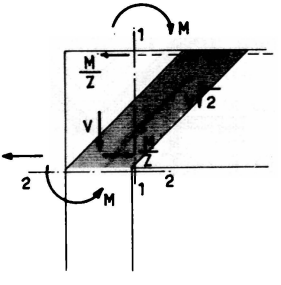


Fig. II.28.

– dans la section 1.1 la vérification retenue pour la continuité (ancrage de l'effort $V + \frac{M}{Z}$)

– dans la section 2.2 une vérification de flexion composée faisant intervenir le moment M et l'effort normal V, centré sur le poteau.

5. Charges appliquées au voisinage des appuis:

Compte tenu du rôle essentiel de la bielle d'appui, inclinée à $\frac{\pi}{4}$, on peut admettre que les charges appliquées, dans la zone d'appui, en dehors de la bielle ne sont pas à prendre en compte dans la vérification au cisaillement ni dans le calcul des cadres et des étriers d'appui ; mais elles doivent être équilibrées à l'about de la poutre où elles créent des poussées au vide* (cas de l'appui sans continuité).

La règle généralement adoptée pour les cadres consiste à conserver, jusqu'à l'extrémité arrière de l'appui la section et l'espacement des armatures transversales calculés en B, sur la ligne AB matérialisant la bielle d'appui (fig. II.29).

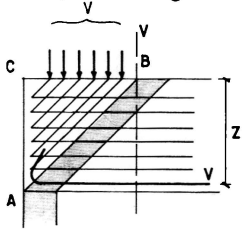


Fig. II.29.

Dans le cas d'un appui de continuité, il y a non seulement intervention de la composante de compression $\frac{M}{Z}$ pour équilibrer V, mais un équilibre mutuel des bielles symétriques par rapport à l'axe de l'appui.

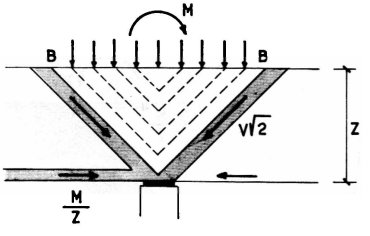


Fig. II.30.

(*) C'est le cas de charges importantes disposées entre C et B.

Si la valeur $V + \frac{M}{Z}$ est négative, on doit prévoir à la partie inférieure une armature dite « de construction » indispensable au maintien des cadres et des étriers prévus au-delà de B jusqu'à l'axe de l'appui.

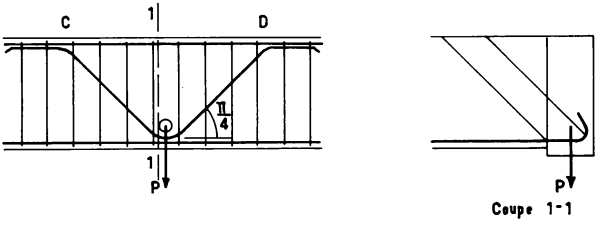
Les valeurs de V et de M retenues pour cette vérification, sont évidemment concomitantes (le cas le plus défavorable du point de vue des armatures transversales est celui qui conduit à la valeur maximale de V, et non de M).

6. Application d'une charge concentrée ; Croisements de poutres :

Mises à part les précautions à prendre dans le cas de pressions localisées (frettage permettant l'épanouissement des bielles de béton) il faut veiller, en cas d'application de charges concentrées, à ce que l'effort correspondant puisse être effectivement transmis sans interruption aux éléments qui doivent le supporter.

Le problème se pose notamment dans le cas d'une charge appliquée à la partie inférieure d'une poutre soumise à un moment positif : la résistance étant assurée par les deux membrures, il est essentiel pour l'équilibre statique de reconstituer le fonctionnement du treillis dans cette zone et de remonter la charge au moyen de suspentes verticales ou inclinées, ancrées au niveau de la membrure supérieure (fig. II.31).

Fig. II.31.



La suspente inclinée représentée ci-dessus est recommandée lorsque la charge concentrée provoque le changement de signe de l'effort tranchant. Cette suspente joue alors le rôle de barre relevée dans la poutre porteuse. Il est cependant plus judicieux de « remonter la charge » en partie par la suspente (50 % par exemple), et en partie par des cadres verticaux répartis entre C et D car cette solution correspond à des contraintes moins importantes dans les bielles de béton.

Si l'effort tranchant a un signe constant, malgré la présence de la charge concentrée, les suspentes doivent être de préférence verticales. Elles sont évidemment encadrées par les armatures secondaires correspondant à l'effort tranchant dans la poutre porteuse (fig. II.32).

Ce cas se présente notamment au croisement de deux ou plusieurs poutres. La figure ci-après représente l'exemple de poutres prenant appui sur un chevêtre (fig. II.33).

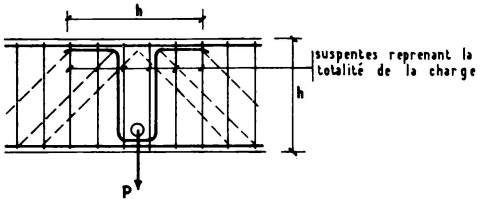


Fig. II.32.

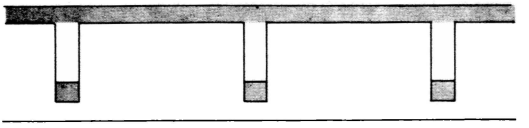


Fig. II.33.

A leur extrémité les poutres sont soumises à un moment fléchissant négatif, et la transmission de l'effort tranchant se fait par leur membrure comprimée, en grisé sur la figure. Là encore il faut relever la charge jusqu'au niveau de la membrure supérieure comprimée du chevêtre, au moyen de suspentes dont la section vient s'ajouter à celle des armatures transversales courantes, calculées à partir de l'effort tranchant dans le chevêtre.

Le plus simple et le plus économique est de reprendre la totalité de l'effort tranchant par les armatures longitudinales inférieures des poutres portées, et de prévoir un retour vertical prolongé par un ancrage horizontal jusqu'à la membrure comprimée de la poutre porteuse. Cet ancrage peut même jouer le rôle de « chapeau » pour la poutre portée (fig. II.34) valable pour la reprise de charges n'entraînant pas l'utilisation de barres de gros diamètre, à cause du rayon de cintrage).

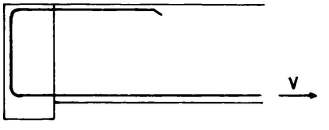


Fig. II.34.

L'attention du projeteur doit aussi être appelée sur le cas de poutres reposant par un about de hauteur réduite sur un « corbeau d'appui » ; là encore le problème de « remontée de charge » doit être étudié, ainsi que la contrainte dans la bielle d'appui (fig. II.35). Le moment fléchissant local doit être en outre calculé par rapport à une section (*s*) décalée par rapport à l'angle rentrant.

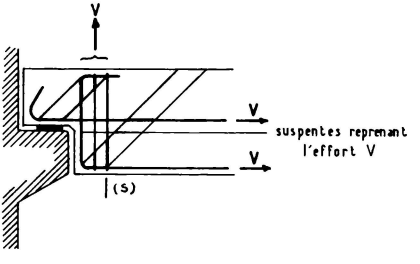


Fig. II.35.

7. Liaison des membrures et de l'âme d'une poutre

Dans le cas de section en T ou en double T ou encore de section en caisson, les ailes ou talons des membrures doivent être liées à l'âme au moyen de ligatures transversales (sections où V et M sont simultanément importants) ou coutures (fig. II.36).

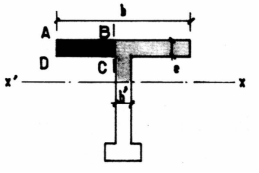


Fig. II.36.

Dans une poutre constituée d'un matériau homogène, le glissement le long de BC (fig. II.36) est donné par la formule :

$$g_{BC} = \frac{V \cdot S_{ABCD}}{I}$$

S_{ABCD} est le moment statique de l'aire $ABCD$ par rapport à l'axe neutre $X'X$ de la section d'inertie I.

V est l'effort tranchant sollicitant la section.

Nous avons vu de même que le glissement maximum se produit au niveau de l'axe neutre et que sa valeur correspond à :

$$g_{\max} = \frac{V \cdot S}{I} = \frac{V}{Z}$$

où S est le moment statique de l'une des parties situées au-dessus ou au-dessous de l'axe neutre, et Z le bras de levier du couple élastique égal à $\frac{I}{S}$.

On peut ainsi écrire, en BC :

$$g_{BC} = \frac{V \cdot S}{I} \cdot \frac{S_{ABCD}}{S} = \frac{V}{Z} \cdot \frac{S_{ABCD}}{S}$$

ou encore, en assimilant les largeurs correspondantes aux moments statiques :

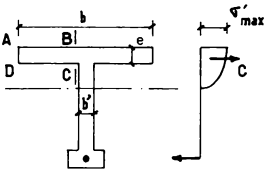
$$g_{BC} = \frac{V}{Z} \cdot \frac{b - b'}{2b}$$

La contrainte de cisaillement le long de BC peut ainsi s'exprimer par :

$$\tau_{BC} = \frac{V}{Z} \cdot \frac{b - b'}{2b \cdot e}$$

Dans les vérifications à l'état limite ultime, la largeur b est celle nécessaire pour reprendre l'effort de compression (dans la section considérée) sous la contrainte maximale $\sigma'_{\max}$ (fig. II.37).

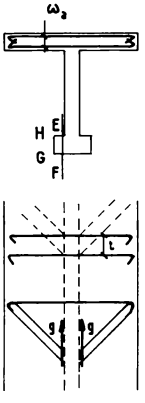
Si C' est l'effort de compression régnant dans l'aile $ABCD$, et C l'effort total de compression, les formules précédentes peuvent être mises sous la forme :



$$\tau_{BC} = \frac{V}{Ze} \cdot \frac{C'}{C} \qquad \text{et} \qquad g_{BC} = \frac{V}{Z} \cdot \frac{C'}{C}$$

Fig. II.37.

L'application de la règle des coutures (théorie des bielles à 45° permet de déterminer dans la table de compression, la section d'armatures perpendiculaires à l'âme : (fig. II.38 *a*) :



(a)

$$\omega_a = \frac{V}{Z \,.\, \sigma_a} \cdot \frac{C'}{C}$$

où ω_a est la section par unité de longueur
et σ_a la contrainte maximale de l'acier admise dans la vérification à l'état limite ultime.

Fig. II.38.

Ces armatures doivent être ancrées à l'extrémité de l'aile et être disposées en deux nappes. En outre, les bielles ne doivent pas travailler à une contrainte excessive :

Si t est, dans le plan horizontal, l'intervalle entre deux cours de barres, l'effort relatif à un intervalle est :

$$\omega_a \,.\, t \,.\, \sigma_a = F$$

La section de la bielle étant : $t \dfrac{\sqrt{2}}{2} . e$

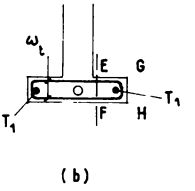
et l'effort auquel elle est soumise $F\sqrt{2}$

on a $$\sigma'_b = \frac{2F}{t \,.\, e} = 2\tau_{BC}$$

Dans une membrure tendue, où une partie des armatures longitudinales est disposée dans un talon, on pourra écrire de façon analogue (fig. II.38*b*).

$$g_{EF} = \frac{V}{Z} \cdot \frac{T_1}{T}$$

où T_1 est l'effort de traction passant dans la partie $EFGH$ et T l'effort de traction total passant dans le talon.



(b)

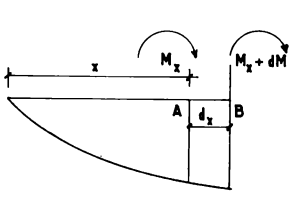
Les armatures de couture par unité de longueur seront :

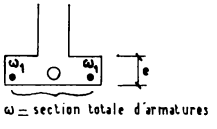
$$\omega_t = \frac{V}{Z \cdot \sigma_a} \cdot \frac{T_1}{T} \qquad \text{(fig. II.38}b\text{)}$$

Pour établir cette formule nous devons calculer (fig. II.38c) :

– la contrainte dans les armatures principales, en un point quelconque A d'abscisse X :

$$M_X = \sigma_a \cdot Z \cdot \omega$$





(c)

– la contrainte au point B, distant de dx :

$$M_X + \mathrm{d}M = (\sigma_a + \mathrm{d}\sigma_a) \cdot Z \cdot \omega$$

La variation d'effort, dans les barres de section ω_1, entre les points A et B est donnée par le produit :

$$\mathrm{d}\sigma_a \cdot \omega_1$$

Cet effort doit être équilibré par le cisaillement τ_X du talon sur l'épaisseur e (le long de l'âme de la poutre).

On a ainsi

$$\tau_X \cdot e \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}\sigma_a \cdot \omega_1 = \frac{\mathrm{d}M}{Z \cdot \omega} \cdot \omega_1$$

$$\tau_X e = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{V_X}{Z} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}$$

La règle nous permet de passer à la formule donnant ω_t :

$$\omega_t = \frac{V_X}{Z \cdot \sigma_a} \cdot \frac{T_1}{T}$$

NOTA : Dans le cas d'une dalle ou d'un hourdis l'usage est d'utiliser les armatures passant sur la poutre (chapeaux et, armatures inférieures si elles sont correctement ancrées), comme armatures de couture, sans superposer les contraintes.

8. Entraînement des armatures :

Il faut noter que l'adhérence d'entraînement τ_d des armatures sur le béton doit permettre d'équilibrer, dans chaque section, les effets du glissement $\frac{V}{Z}$. En appelant p le périmètre total des barres traversant la section, l'équilibre impose :

$$\frac{V}{p \, . \, Z} = \tau_d \leqslant \overline{\tau_d}$$

Cette vérification est nécessaire dans les zones d'appui.
$\overline{\tau_d}$ est la valeur maximale admise dans l'état limite considéré.

9. Effet Résal :

Les poutres de hauteur variable présentent en général un extrados sensiblement horizontal, et un intrados courbe ou rectiligne. Les sections normales de la poutre ne sont plus verticales, mais perpendiculaires à la fibre moyenne (l'angle entre la section normale à la fibre moyenne et la verticale est toujours très faible de sorte que l'introduction d'efforts normaux ou d'efforts tranchants calculés par référence à des sections verticales n'entraîne qu'une erreur assez faible).

Si elle est comprimée, la membrane inférieure de la poutre contribue par son inclinaison à équilibrer partiellement l'effort tranchant. C'est l'effet Resal (fig. II.39*a*).

Dans certains cas exceptionnels, au contraire, la composante verticale de l'effort régnant dans une membrure inférieure inclinée et tendue vient s'ajouter à l'effort tranchant (fig. II.39*b*).

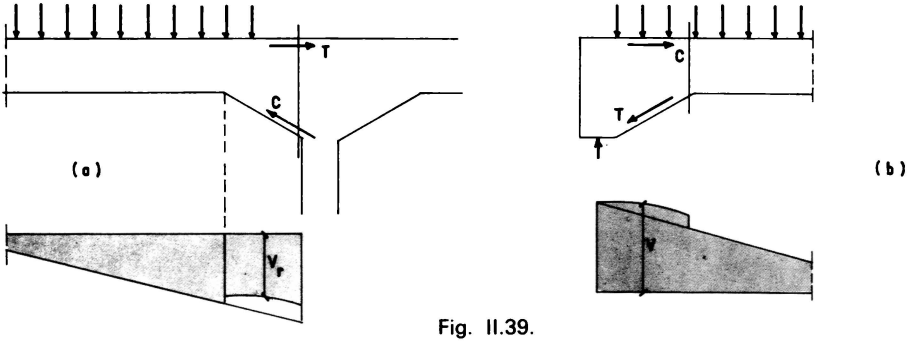


Fig. II.39.

Enfin, un cas très courant en bâtiment est celui des fermes de charpente où le faitage a une section médiane de hauteur plus importante que celle des sections d'appui (fig. II.39*c*). Il faut alors équilibrer la composante verticale des efforts C.

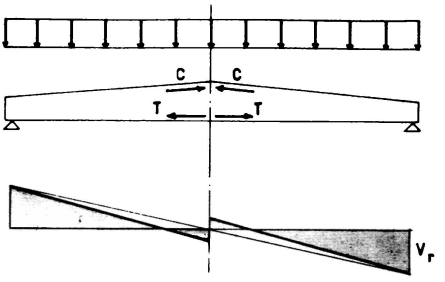


Fig. II.39*c*.

Dans le cas où la poutre est constituée de deux membrures distinctes réunies par une âme, la théorie développée par Résal conduit à considérer dans une section courante de hauteur variable $h(x)$ l'effort tranchant réduit :

$$V_R = V - \frac{M}{h} \cdot \frac{dh}{dx}$$

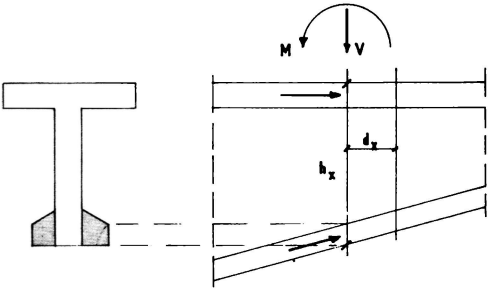


Fig. II.39*d*.

Compte tenu de l'erreur commise en considérant une section verticale au lieu de la section normale à la fibre moyenne, il semble que cette formule conduise à une valeur un peu trop faible de l'effort tranchant réduit. La règle généralement adoptée aujourd'hui est de déduire la composante verticale, non de la membrure inférieure toute entière, mais seulement de sa partie qui déborde de l'âme, dans le talon d'une poutre à talon ou d'une poutre-caisson. (C'est certainement une règle trop prudente.) **(fig. II.39.*d*).**

10. Déformation d'effort tranchant à l'état de service :

Le treillis de Ritter Morsch, résultant de la fissuration du béton permet d'évaluer la déformation d'effort tranchant à partir de l'allongement des armatures d'âme et du raccourcissement des bielles.

L'hypothèse la plus courante de $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$ conduit à la représentation ci-contre :

σ'_b = contrainte dans la bielle
σ_a = contrainte dans les cadres
A = section des cadres.

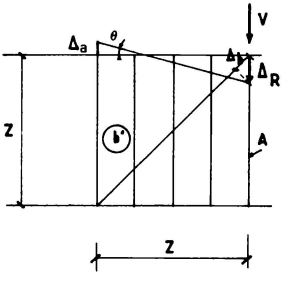


Fig. II.40.

avec $\Delta_b = \frac{\sigma'_b}{E_b} = \frac{2V}{b' Z . E_b} \times Z\sqrt{2} = \frac{2V . \sqrt{2}}{b' E_b}$ = raccourcissement des bielles,
on obtient le déplacement vertical :

$$\Delta_R = \Delta_b . \sqrt{2}$$

soit

$$\Delta_R = \frac{4V}{b' E_b}$$

et avec $\Delta_a = \frac{\sigma_a}{E_a}$ on peut écrire grâce à la formule donnant l'intervalle e des armatures d'âme :

$$e = \frac{\sigma_a . A . Z}{V}$$

soit $\Delta_a = \frac{V . e}{A . Z . E_a} . Z = \frac{V . e}{A . E_a}$ = allongement des armatures

d'où l'angle de déformation du panneau de longueur Z sous l'effort tranchant V :

$$\theta = \frac{\Delta_a + \Delta_R}{Z} = \frac{V}{Z}\left(\frac{e}{A . E_a} + \frac{4}{b' . E_b}\right)$$

ou

$$\theta = \frac{V}{E_a . b' . Z}\left(\frac{e . b'}{A} + \frac{4E_a}{E_b}\right)$$

La relation classique $\frac{V}{G . S} = \theta$ donne la rigidité à l'effort tranchant

$$GS = \frac{V}{\theta}$$

B) ESSAIS JUSQU'A RUPTURE DE POUTRES ISOSTATIQUES SOUMISES A L'EFFORT TRANCHANT

Les récents essais réalisés à Stuttgart et à Zurich par F. Leonhardt Bachmann et Thurliman sur des poutres diverses, en particulier sur des poutres en T, ont montré l'influence qu'exerce le rapport de la largeur de la membrure comprimée à l'épaisseur de l'âme, b/b_0, sur la participation à la résistance de la poutre à l'effort tranchant (membrure comprimée et armatures d'âme, fig. II.41).

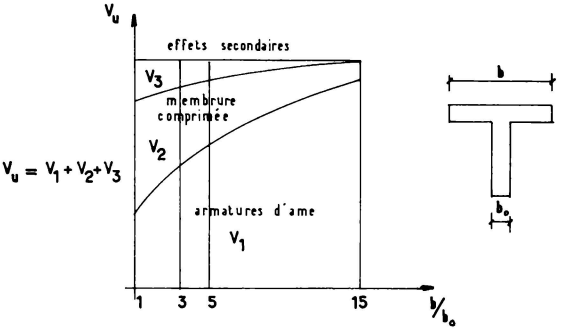


Fig. II.41.

Ces essais effectués sur des éléments toujours munis d'armatures transversales n'ont pas été limités à l'apparition de la première fissure (qui peut se produire prématurément, par exemple sous l'effet de déformations imposées dues à la température et au retrait) mais ont été poussés jusqu'à la rupture.

On a constaté qu'une poutre commence à fonctionner comme un arc (fig. II.42) et que cet effet d'arc est plus net dans une poutre rectangulaire, ou à faible largeur de table de compression, que dans une poutre en T où la table de compression est nécessaire pour reprendre l'effort de compression $\frac{M}{Z}$ et où l'effet d'arc ne commence à s'amorcer que près des extrémités (sauf si l'épaisseur de la table de compression est importante).

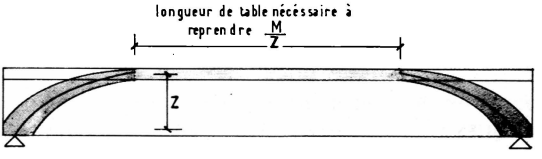


Fig. II.42.

Pour les poutres à tables très minces, on peut admettre en effet que l'effort de compression $\frac{M}{Z}$ est horizontal et que sa direction est imposée par celle de la table.

Les essais ont ainsi confirmé les deux résultats importants suivants :

1° *La résultante des compressions dans la membrure comprimée est inclinée, notamment au voisinage des appuis où l'effort tranchant est le plus grand.*

2° *Au voisinage des appuis les bielles comprimées présentent le plus souvent une inclinaison inférieure à 45°.*

On peut déduire de ces deux résultats que :

a) dans la zone où la résultante des compressions est inclinée, une partie de l'effort tranchant est reprise par la membrure comprimée (fig. II.43*a*).

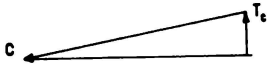
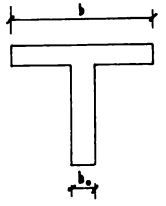


Fig. II.43.*a*

b) le treillis classique avec bielles inclinées à 45° doit être rectifié en fonction du rapport $\frac{b}{b_0}$ de la largeur de table de compression à l'épaisseur de l'âme.



Les essais ont permis de comparer les valeurs réelles des contraintes dans les étriers, à celles calculées par la méthode classique. Elles sont figurées ci-après (fig. II.44).

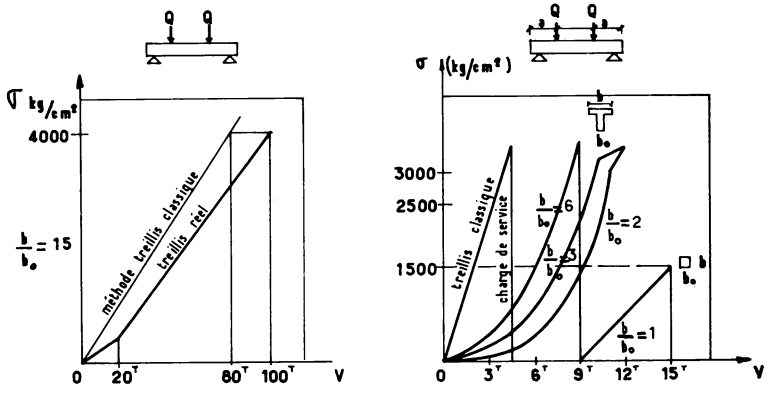


Fig. II.44.

REMARQUES :

— Si l'inclinaison de la membrure comprimée permet d'équilibrer une partie de l'effort tranchant, par contre la réduction consécutive du bras de levier conduit à un accroissement de l'effort de traction dans l'armature principale.

— de même l'inclinaison des bielles, inférieure à 45°, conduit à une diminution des efforts de traction dans les armatures verticales d'âme et à une augmentation, au voisinage de l'appui, de la traction de la membrure inférieure due à un décalage plus grand de la courbe enveloppe des moments (cf. A,3°).

– en ce qui concerne les contraintes régnant dans les bielles, lès mesures effectuées ont permis de déterminer que pour des étriers verticaux, la contrainte dans les bielles était de l'ordre de $2{,}2\tau$ au lieu de la valeur théorique 2τ (voir A,2°). Pour les étriers inclinés à 45° on obtient $1{,}1\tau$ au lieu de la valeur théorique τ. La théorie du treillis classique est donc vérifiée dans les deux cas à 10 % près.

Interprétation des résultats

A la lumière des résultats d'essais effectués à ce jour, il est donc possible de généraliser l'analogie classique du treillis et de proposer les modèles suivants :

$$6 < \frac{b}{b_o} \leqslant 15$$

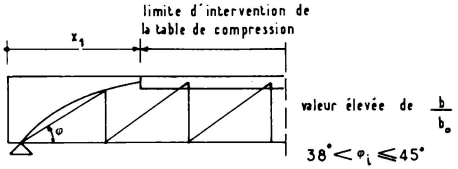
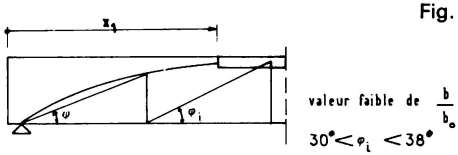


Fig. II.45

$$1 < \frac{b}{b_o} < 6$$



b_o est l'épaisseur de l'âme

La construction du modèle peut être effectuée aisément en déterminant le point de la poutre où l'équilibre peut être assuré sans intervention de la table de compression, à l'état limite ultime. A partir de ce point la membrure comprimée peut être raccordée paraboliquement à l'appui. Il suffit donc de trouver la section d'abscisse x_1, sollicitée par un moment M_{x_1} d'état limite ultime, où l'âme seule (sans intervention de la table de compression) peut permettre de justifier l'équilibre compte tenu du décalage de la courbe des moments. La membrure de section $ABCD$ est telle que :

$AB = DC = b_0$

et $AD = BC = e$

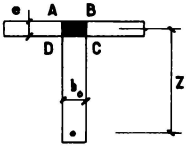


Fig. II.46.

Connaissant l'abscisse x_1, par rapport à l'appui de la poutre, on trace une parabole de flèche $f = Z$, de longueur $l = 2x_1$ et d'équation

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) = \frac{Z}{x_1^2} x(2x_1 - x)$$

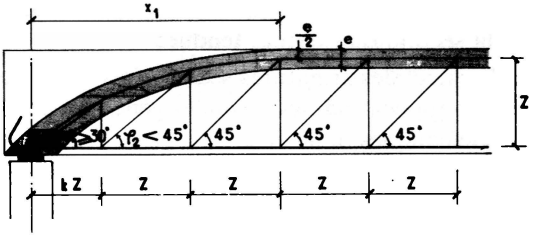


Fig. II.47.

Sur la longueur x_1 on pourra définir une série de panneaux de longueur Z pour lesquels l'inclinaison des bielles est inférieure ou égale à $\frac{\pi}{4}$. Le premier panneau de longueur kZ est tel que $k \leqslant 1$ et l'inclinaison de la bielle est supérieure ou égale à :

38° pour $6 < \frac{b}{b_0} \leqslant 15$ ou 30° pour $\frac{b}{b_0} \leqslant 6$

Dans le cas d'une poutre rectangulaire (où la parabole est plus surbaissée que dans une poutre en T) la longueur $l = 2x_1$ est limitée en admettant que la pente de la bielle d'appui reste supérieure à 30°.

En effet pour $x = 0$, la pente à l'origine de la parabole vaut $\frac{4f}{l}$

On a donc $$\frac{4f}{l} \geqslant 0{,}577$$

Soit pour $$f = Z \quad ; \quad Z \geqslant 0{,}144l$$

On peut donc adopter pour la parabole, une longueur l maximale comprise entre $6Z$ et $7Z$.

Ainsi pour $x_1 = \frac{l}{2} = 3Z$, on aurait dans le cas d'une poutre de section rectangulaire (fig. II.48) les résultats suivants :

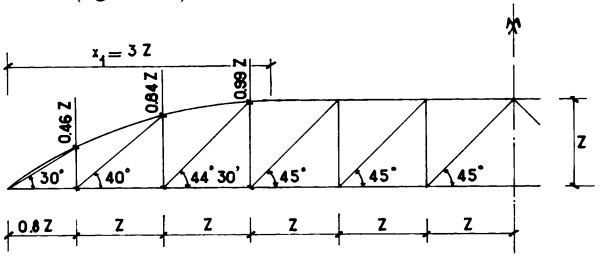


Fig. II.48.

– dans chaque panneau correspondant au tracé de la parabole de raccordement, la tangente à la parabole (dans la partie médiane du panneau considéré) permet de calculer l'inclinaison moyenne de la membrure comprimée et par conséquent la partie d'effort tranchant reprise par cette membrure dans le panneau étudié;

– la réduction du bras de levier doit être évidemment prise en compte pour calculer la section d'armature tendue;

– le calcul des armatures secondaires et des contraintes dans les bielles est effectué par application des formules générales établies précédemment pour des valeurs quelconques de φ et α.

Pour les panneaux ou $\varphi < 45^\circ$, les formules générales deviennent :

avec $$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad V = \omega_\alpha . \sigma_a . Z_i . \operatorname{cotg} \varphi$$

soit $$\omega_\alpha = \frac{V . \operatorname{tg} \varphi}{\sigma_a . Z_i}$$

et $$\sigma'_b = \frac{V}{b_0 . Z_i . \sin \varphi \cos \varphi}$$

Le décalage de la courbe des moments vaut dans ce cas :

$$\Delta x = \frac{Z}{2} \operatorname{cotg} \varphi$$

En un point quelconque de la parabole de raccordement, d'abscisse x, la pente est égale à :

$$\frac{4f}{l} - \frac{8fx}{l^2}$$

(où l est la longueur de la parabole).

Compte tenu de l'obliquité de la membrure comprimée, on peut déterminer l'effort tranchant V_c, repris par cette membrure, dans la section d'abscisse x :

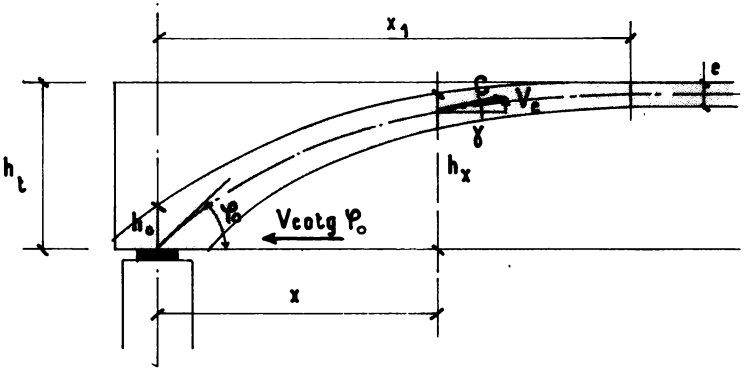


Fig. II.49.

h_0 étant la hauteur nécessaire à l'appui pour reprendre la bielle sous l'effort $\frac{V}{\sin \varphi_0}$, le moment fléchissant dans la section de hauteur h (x) vaut, à l'état ultime : M_{xu}.

φ_0 est l'angle de la 1re bielle. On vérifie la section d'abscisse x conformément à ce qui a été développé dans le chapitre relatif à la vérification des sections soumises à la flexion simple (fig. II.50).

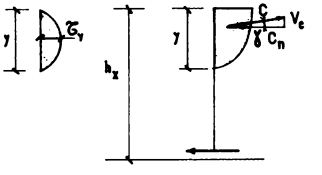


Fig. II.50.

La résultante C est inclinée d'un angle γ, donné par la tangente à la parabole de raccordement, dans la section x.

On a ainsi : $V_c = C_n . \operatorname{tg} \gamma$ avec $C_n = C . \cos \gamma$

Si V_x est l'effort tranchant dans la section x, à l'état limite ultime, l'effort tranchant résiduel s'écrit :

$$V_r = V_{xu} - V_c$$

La composante V_c provoque un cisaillement dans la membrure. Il est possible de tracer un cercle de Mohr au niveau du centre de gravité de la membrure comprimée de hauteur y, en portant la contrainte normale σ'_c due à C_n et la contrainte de cisaillement τ_V. Il apparaît alors que la direction de la contrainte principale de compression forme un angle β avec l'horizontale tel que :

$$\text{tg } 2\beta = \frac{2\tau_V}{\sigma'_c}$$

L'angle β est toujours inférieur à $\frac{\pi}{4}$

NOTA : Compte tenu des résultats d'essais effectués pour la mesure des contraintes des armatures transversales dans les poutres calculées conformément à la théorie classique du treillis, la plupart des règlements modernes admettent de continuer à appliquer cette théorie à condition de minorer la contrainte de cisaillement $\frac{V}{bh}$ d'un terme fixe qui conduit à une minoration du cisaillement limite $\frac{V_u}{b.h}$ (où h représente la hauteur utile de la section).

On peut encore noter que les armatures transversales peuvent être dimensionnées, dans le premier panneau d'appui, à partir de la valeur de l'effort tranchant V_1 calculé à l'extrémité B de ce panneau (fig. II.51).

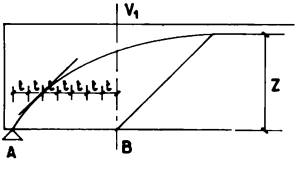


Fig. II.51.

Les cadres et étriers pourront être au même intervalle sur toute la longueur AB.

C) RÉSISTANCE DES DALLES ET DES POUTRES-DALLES

1. Définition

Les dalles sont des structures planes pouvant résister à des moments de flexion importants; elles sont armées en conséquence.

Les poutres larges (3 fois la hauteur totale) peuvent être traitées comme des dalles portant sur deux appuis.

Sous certaines conditions, ces éléments ne comportent pas d'armatures transversales pour résister à l'effort tranchant.

2. Dalles sans armatures transversales

Sous les premières sollicitations la dalle se comporte comme un arc à tirant très surbaissé (fig. II.52 et II.53).

Fig. II.52.

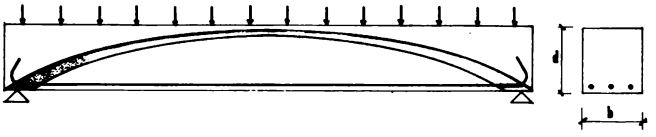
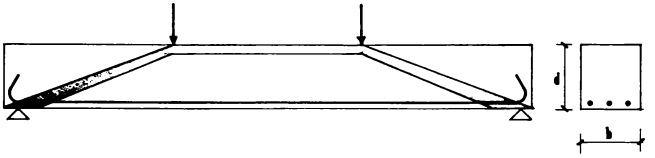
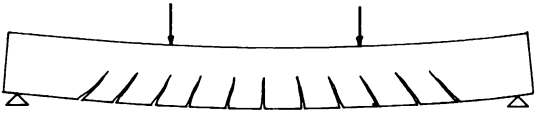


Fig. II.53.



Après apparition des fissures (d'abord les fissures de flexion), trois effets contribuent à la résistance des dalles :

Fig. II.54.



– les dents de béton qui se forment ont une résistance propre, due à leur encastrement dans la zone comprimée ;

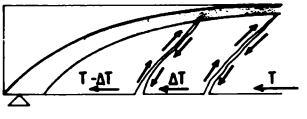
– au niveau de l'armature longitudinale, il y a compatibilité de déplacement entre les dents de béton et l'armature longitudinale tendue;

– le contact des agrégats qui s'engrènent les uns dans les autres le long des fissures accroît la résistance de ces dents.

On s'aperçoit ainsi que la contrainte dans le tirant de l'arc est réduite par suite de l'intervention des dents de béton qui absorbent une partie de l'effort.

La rupture de la pièce sous l'action de l'effort tranchant peut provenir soit de la ruine de l'un des modes de transmission des cisaillements au niveau des fissures (y compris parfois la rupture des dents) soit de la pénétration d'une fissure oblique dans la zone comprimée (fig. II.55). La pièce atteint son état limite ultime dès qu'une fissure oblique d'effort tranchant se développe à partir d'une fissure de flexion (effort tranchant-traction). La rupture survient par écrasement de la zone comprimée, réduite par la pénétration de la fissure.

Fig. II.55.



Pour retarder l'apparition de ces fissures obliques, en l'absence d'armatures transversales, il convient de raidir le tirant (sur-section d'acier) et d'améliorer la

qualité de la liaison béton tendu-acier. Le renforcement du tirant est obtenu en choisissant un décalage plus grand de la courbe des moments vers les points de moment nul, ou en augmentant le pourcentage d'armatures dans la section considérée.

Des essais ont permis d'étudier l'influence du type de chargement et de sa nature, ainsi que l'importance de l'épaisseur de la dalle :

– les charges réparties sont moins dangereuses que les charges concentrées, dont la position la plus défavorable correspond à une distance à l'appui égale à environ trois fois la hauteur utile;

– l'augmentation de la hauteur utile ne procure pas une amélioration proportionnelle de l'effort-tranchant limite ultime, car la rigidité des dents de béton et l'efficacité de l'engrènement diminuent quand la hauteur totale augmente (fig. II.56).

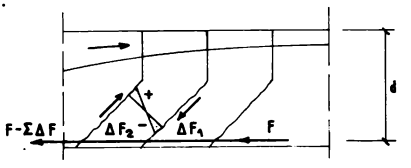


Fig. II.56.

L'utilisation d'armatures transversales devient nécessaire lorsque la contrainte de cisaillement dépasse une certaine limite ; on applique les mêmes règles que pour les poutres. La mise en place des armatures transversales devient difficile pour des épaisseurs inférieures ou égales à 20 cm.

La qualité du béton joue un rôle important.

Un bon béton permet :

– une meilleure résistance en compression lorsqu'il y a effet d'arc,

– une meilleure résistance des dents de béton qui travaillent en flexion comme un matériau homogène,

– de retarder la pénétration des fissures au-dessus de l'axe neutre.

Un sur-dimensionnement de l'armature tendue dans la zone de fissures obliques, en même temps qu'une bonne adhérence (utilisation d'acier de faible diamètre - $1/10^{e}$ de l'épaisseur de la dalle au maximum) tend à diminuer le déplacement relatif des dents de béton.

Une épaisseur de dalle trop forte, incompatible avec la sollicitation et la flèche admissibles diminue la rigidité des dents de béton.

En portant en abscisse l'épaisseur de dalle et en ordonnée la valeur moyenne de la contrainte de cisaillement :

$$\tau = \frac{V}{b \, . \, d}$$

où V est l'effort tranchant limite variant proportionnellement à la hauteur utile d de la dalle et b, la largeur de la dalle.

On obtient le diagramme ci-dessous (fig. II.57).

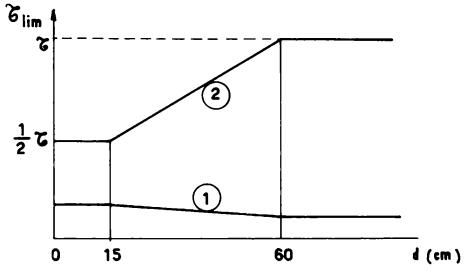


Fig. II.57.

Le diagramme 1 montre que sans armatures transversales, le cisaillement limite est supérieur pour les dalles ayant une hauteur utile de l'ordre de 15 cm.

Le diagramme 2 donne une indication sur le cisaillement limite admissible dans le cas où ces mêmes dalles sont munies d'armatures transversales conformément à la théorie du treillis.

Nous verrons à propos des prescriptions règlementaires que le C.E.B. (Comité Européen du Béton) a proposé une formule faisant intervenir la hauteur utile de la dalle, le pourcentage d'armatures longitudinales ancrées au-delà de la section la plus sollicitée au cisaillement et la résistance du béton.

Il semble toutefois que la règle qui consiste à imposer un pourcentage minimal d'armatures longitudinales (0,2 % par exemple) convenablement ancrées au-delà de l'appui, et à fixer (pour la vérification à l'état limite ultime) une valeur supérieure de τ (pouvant atteindre 60 % de la résistance caractéristique du béton à la traction)*, serait d'application plus simple, avec cependant les deux conditions suivantes :

a) n'admettre aucune reprise de bétonnage

b) imposer des armatures transversales au-delà de 30 cm d'épaisseur.

3. Élancement des dalles reposant sur deux lignes d'appui:

Si l'on veut que les flèches enregistrées sur les dalles supportant des surcharges modérées (surcharge répartie inférieure ou égale à deux fois la charge permanente) soient admissibles, il est bon d'adopter les rapports suivants entre hauteur utile et portée libre de la dalle :

$\frac{h}{l} \geqslant \frac{1}{35}$ pour des dalles portant sur deux appuis libres

$\frac{h}{l} \geqslant \frac{1}{40}$ pour les travées de rive des dalles continues dont le rapport des portées varie entre 0,8 et 1,2

(*) pour les dalles sans armatures transversales.

$\frac{1}{40} \geqslant \frac{h}{l} \geqslant \frac{1}{44}$ pour les travées intermédiaires des dalles continues dont le rapport des portées varie entre 0,8 et 1,2.

Ces règles simples sont notamment utilisées en Bâtiment.

4. Dispositions constructives pour dalles courantes:

Lorsque les dalles sont armées avec des armatures de faible diamètre (1/10 de l'épaisseur de la dalle au maximum) il est loisible d'arrêter une barre sur deux en travée pour des charges et surcharges uniformément réparties. L'épure d'arrêt des barres peut être effectuée en respectant un décalage de la courbe des moments égal au minimum à l'épaisseur h_t de la dalle.

Pour réaliser une continuité, on peut utiliser en « chapeaux » la moitié de la section totale d'armatures, à partir du point où elle peut être arrêtée avant l'appui.

Cette disposition améliore de façon économique la résistance à l'effort tranchant (fig. II.58).

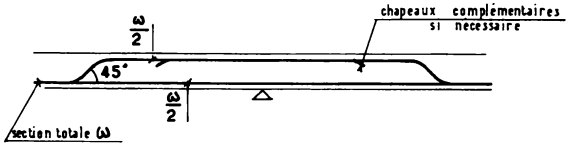


Fig. II.58.

Dans le cas où des charges concentrées sont appliquées il est préférable de faire filer, sur la longueur de la travée, la totalité des barres.

5. Poinçonnement des dalles

Les dalles chargées ou appuyées ponctuellement sont soumises localement à des efforts tranchants importants qui peuvent provoquer l'arrachement d'un volume conique ou pyramidal de béton. Les surfaces de rupture sont inclinées de 35° à 45° sur le feuillet moyen de la dalle. Il est donc nécessaire de prévoir des armatures lorsque la contrainte de cisaillement est élevée (fig. II.59).

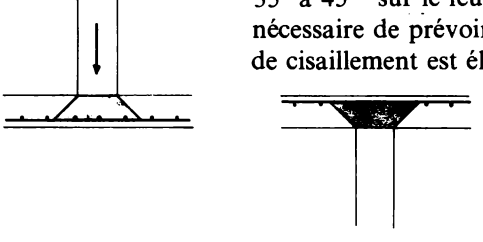
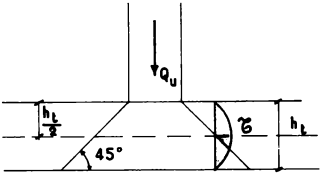


Fig. II.59.

Ces coutures ne sont pas nécessaires si le cisaillement maximal au niveau du feuillet moyen ne dépasse pas environ 60 % de la contrainte caractéristique de traction f_{tj} du béton, dans une vérification à l'état limite ultime et dans l'hypothèse d'une fissuration inclinée à 45° (fig. II.60)

Fig. II.60.



En appelant P_c le périmètre de la section, homothétique de la base du poteau à mi-épaisseur de la dalle, et τ le cisaillement maximal du béton à ce même niveau : l'équilibre impose que :

$$\tau \cdot \frac{2}{3} \cdot h_t \cdot P_c = Q_u \qquad \text{d'où} \qquad \tau = \frac{1{,}5 Q_u}{P_c \cdot h_t}$$

ou encore :

$$0{,}6 f_{tj} = \frac{1{,}5 Q_u}{P_c \cdot h_t}$$

La valeur maximale de Q_u peut donc être définie par :

$$Q_u \leqslant 0{,}4 \cdot f_{tj} \cdot P_c \cdot h_t$$

D) PRESCRIPTIONS RÉGLEMENTAIRES

Règles CEB

Le Comité Euro-International du Béton dans son bulletin d'information n° 117 F de décembre 1976, donne les règles de calcul suivantes :

1. Éléments sans armatures d'effort tranchant (dalles)

A l'état limite ultime, il faut vérifier que l'effort tranchant de calcul V_{sd} satisfait la condition

$$V_{sd} \leqslant V_{Rd_1}$$

avec :

$$V_{Rd_1} = 0{,}25 \frac{f_{ctk}}{\gamma_s} \cdot k(1 + 50\rho_l) b_w \cdot d$$

où

f_{ctk} est la résistance caractéristique du béton à la traction (MPa);

k est un coefficient égal à $(1{,}6 - d)$ borné inférieurement par l'unité où d est l'épaisseur de la dalle exprimée en mètres.

$\rho_l = \dfrac{A}{b_w \,.\, d}$ est le pourcentage des armatures tendues dans la section considérée, borné supérieurement à 0,02.

b_w et d sont respectivement la largeur de l'élément et son épaisseur, exprimés en millimètres.

$\gamma_s = 1{,}5$ est le coefficient de minoration applicable au béton.

Ainsi pour une dalle de 0,20 m d'épaisseur et de 1,00 m de largeur présentant un pourcentage d'armatures tendues de 0,01, on obtient, pour $f_{ctk} = 2{,}7$ MPa et $\gamma_s = 1{,}5$:

$$V_{Rd_1} = 0{,}25 \times 1{,}8 \times 1{,}4(1 + 50 \,.\, 0{,}01)1\,000 \times 200 = 189 \text{ K} \,.\, \text{N}$$

ce qui correspond à une contrainte de cisaillement voisine de 0,9 MPa sous l'action des charges majorées.

2. *Éléments avec armatures d'effort tranchant :*

Le calcul est effectué seulement à l'état limite ultime. Le diamètre des armatures ne doit pas excéder 12 mm.

L'inclinaison α des armatures d'effort tranchant sur la ligne moyenne ne doit pas être inférieure à 45°.

Dans le cas d'utilisation de barres relevées, ces dernières ne doivent pas être sollicitées à plus de 70 % de leur résistance.

L'effort tranchant de calcul V_{sd} doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$V_{sd} \leqslant V_{Rd_2} \qquad \text{(compression de l'âme)}$$

$$V_{sd} \leqslant V_{Rd_3} \qquad \text{(armatures)}$$

avec $$V_{Rd_3} = V_{wd} + V_{cd}$$

Deux méthodes de vérification sont proposées :

a) *méthode Standard :*

$$V_{Rd_2} = 0{,}3 f_{cd} \,.\, b_w \,.\, d$$

(étriers et cadres à $\dfrac{\pi}{2}$ avec ou sans barres relevées)

$$V_{Rd_2} = 0{,}45 f_{cd} \,.\, b_w \,.\, d$$

$\left(\text{étriers et cadres à } \dfrac{\pi}{4}\right)$

avec $f_{cd} = \dfrac{f_{ck}}{1{,}5}$

f_{ck} est la résistance caractéristique du béton à la compression.

En appelant s l'intervalle entre armatures transversales le long de la ligne moyenne

$$V_{wd} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0{,}9d \cdot f_{ywd}(1 + \text{cotg } \alpha) \sin \alpha$$

Cette formule suppose une inclinaison des bielles à $\frac{\pi}{4}$.

A_{sw} est la section des armatures transversales
f_{ywd} est la contrainte de calcul de ces armatures à l'état limite ultime.

La part d'effort tranchant reprise par la membrure comprimée est donnée par :

$$V_{cd} = 0{,}6 f_{ctd} \cdot b_w \cdot d$$

avec f_{ctd} égal à $\frac{f_{ctk}}{1{,}5}$ (MPa)

b_w = épaisseur de l'âme en millimètres
d = hauteur totale de la poutre en millimètres.

b) *méthode affinée* (pour inclinaison de bielles variant de 31° à 59°) :

$$V_{Rd_2} = 0{,}3 \cdot f_{cd} \cdot b_{wd} \cdot d \cdot \sin 2\theta$$

θ représente la pente des bielles qui peut être telle que

$$\frac{3}{5} \leqslant \text{cotg } \theta \leqslant \frac{5}{3}$$

Le choix de θ est fonction de l'inégalité :

$$V_{sd} \leqslant V_{Rd_2}$$

L'armature doit, par ailleurs, répondre à l'équation :

$$V_{wd} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot 0{,}9d \cdot f_{ywd}(\text{cotg } \theta + \text{cotg } \alpha) \sin \alpha$$

Si l'inclinaison θ des bielles de béton est inférieure à 45°, la formule de la méthode standard donnant V_{cd} reste valable.

Notons enfin que le décalage de la courbe des moments fléchissants, est donné par :

$$a_l = \frac{V_{sd} \cdot s}{2A_{sw} \cdot f_{ywd} \cdot \sin \alpha} - d \cdot \text{cotg } \alpha$$

Nouveau Règlement Français B.A.E.L. (Béton Armé aux États Limites)

Il prévoit dans tous les cas un décalage de la courbe des moments fléchissants égal à $0{,}8h_t$.

h_t désigne ici la hauteur de la poutre ou de la dalle.

Les poutres sont vérifiées à l'état limite ultime et la contrainte de cisaillement est donnée par la formule :

$$\tau_{ul} = \frac{V_{ul}}{b_0 \cdot d}$$

On notera qu'il s'agit par mesure de simplification d'une contrainte fictive, puisque la contrainte de calcul fait intervenir Z et non pas d.

b_0 est la largeur de l'âme et d la hauteur utile de la poutre dont la hauteur totale est h_t.

Si les armatures transversales sont perpendiculaires à la ligne moyenne, avec ou sans barres relevées, on devra vérifier que la contrainte de cisaillement du béton de l'âme τ_{ul} est au plus égale à :

$$0{,}13f_{cj} \quad \text{ou} \quad 4 \text{ MPa}.$$

Si les armatures d'âme sont inclinées à 45° sur l'axe de la poutre, la valeur limite de τ_{ul} est $0{,}18f_{cj}$ ou 5,5 MPa.

Dans le cas où la fissuration est préjudiciable la valeur de τ_{ul} est réduite à :

$$0{,}10f_{cj} \quad \text{ou} \quad 3 \text{ MPa}$$

Dans le calcul de l'effort tranchant, les charges réparties comprises entre l'appui et la section de la poutre situé à $\frac{h_t}{2}$ de cet appui ne sont pas prises en compte.

La justification vis-à-vis de l'état limite ultime des armatures transversales d'âme s'écrit pour la flexion simple :

$$\frac{A_t}{b_0 \cdot t} \geqslant \frac{\tau_{ul} - 0{,}5k}{0{,}8f_e(\cos \alpha + \sin \alpha)}$$

où

A_t est la section des armatures d'âme distantes de t,
k est un coefficient égal à 1 pour flexion simple,
f_e la limite élastique des armatures d'âme,
α l'inclinaison des armatures sur l'horizontale,
et $k = 0$ s'il y a reprise de bétonnage.

La section minimale d'armatures requises est telle que :

$$\frac{A_t \cdot f_e}{b \cdot t \cdot \sin \alpha} \geqslant \frac{\tau_{ul}}{2} \quad \text{ou} \quad 0{,}4 \text{ MPa}$$

La distance maximale pour t est :

$$0{,}9d \quad \text{ou} \quad 40 \text{ cm}$$

Pour une dalle ayant une largeur égale au minimum à 3 fois son épaisseur et portant sur deux appuis, aucune armature d'âme n'est requise si la pièce est bétonnée sans reprise sur toute son épaisseur et si la contrainte tangente est inférieure ou égale à : $0{,}05 f_{cj}$ (f_{cj} est la contrainte caractéristique du béton à la compression).

Avec les définitions données dans le paragraphe C.5 sur le poinçonnement on doit vérifier que :

$$Q_{ul} \leqslant 0{,}045 P_c \cdot h_t \cdot f_{cj}$$

BIBLIOGRAPHIE

- Bulletins d'information du Comité International du Béton.
- F. LEONHARDT, *Cours de Béton Armé*, (Université de Stuttgart).
- R. LACROIX, *Cours de Béton Armé* (E.N.P.C.)

CHAPITRE III

POUTRES — CLOISONS

1. Définition

Dès que la hauteur d'une poutre est supérieure ou égale à la moitié de sa portée, on dit qu'il s'agit d'une poutre cloison.

2. Essais de poutres de section rectangulaire et d'épaisseur *b*

Si l'on dispose des jauges de contraintes sur des poutres isostatiques de différentes hauteurs, soumises par exemple à une charge uniformément répartie q, on constate à mi-portée, pour la poutre homogène :

a) dont la hauteur est égale au quart de la portée

$$h = \frac{l}{4}$$

que les contraintes obéissent à la loi de Navier

$$\sigma_{max} = -\sigma'_{max} = \frac{12q}{b} \qquad \text{et} \qquad T = -C = 0{,}75ql$$

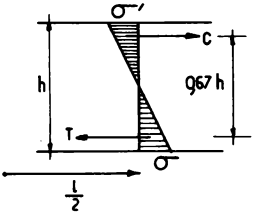
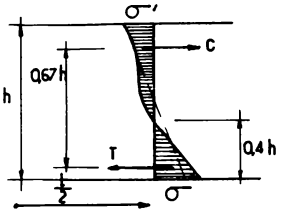


Fig. III.1.

b) dont la hauteur est telle que

$$h = \frac{l}{2}$$

une répartition presque triangulaire des contraintes de traction, avec un axe



neutre situé à $0{,}4h$ environ du parement inférieur

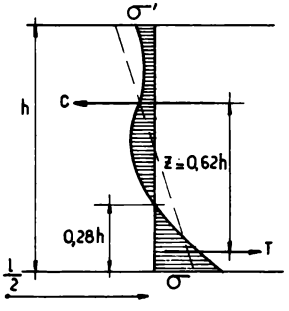
$$\sigma'_{max} = \frac{3q}{b} \qquad \sigma_{max} = \frac{-4{,}5q}{b} \qquad T = -C = 0{,}38ql$$

Fig. III.2.

c) dont la hauteur est telle que

$$l = h$$

que l'axe neutre se situe à $0{,}28h$ environ du parement inférieur



$$\sigma_{max} = \frac{-1{,}6q}{b} \qquad T = 0{,}20ql$$

σ' varie de 0 au niveau de l'axe neutre à $0{,}42\,\frac{q}{b}$ sur le parement supérieur de la poutre où la loi de Navier nous donnerait

$$\frac{0{,}75q}{b}$$

Fig. III.3.

d) dont la hauteur h est supérieure à la portée l que :

- la contrainte de traction maximale reste de l'ordre de $\frac{1{,}6q}{b}$
- l'axe neutre se situe à $0{,}25l$ environ du parement inférieur
- la contrainte maximale de compression est de l'ordre de $\frac{0{,}4q}{b}$; elle devient

pratiquement nulle à un niveau du parement inférieur égal sensiblement à la portée de la poutre

- on peut admettre

$$0{,}16ql < T < 0{,}20ql$$
$$0{,}62l < Z < 0{,}78l$$

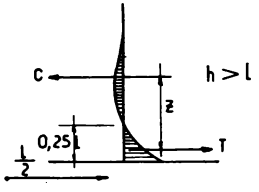


Fig. III.4.

la règle pratique du calcul de Z pourraît être

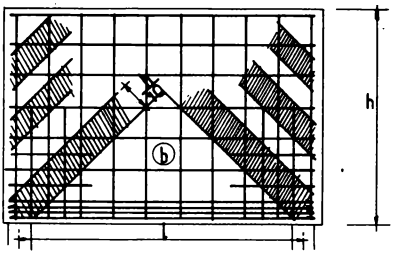
$$Z = 0{,}2(l + 2h)$$

Ces essais nous montrent l'importance de l'effet d'arc au fur et à mesure que la hauteur de la poutre augmente.

Il est donc essentiel de faire filer *l'armature de traction* (qui intervient après fissuration de la poutre) *d'un appui à l'autre et d'en assurer l'ancrage.*

Il est important aussi, pour diminuer la contrainte dans les bielles d'appui, de mobiliser toutes les bielles qui peuvent « pousser au vide », donc de prévoir des armatures horizontales, juste au-dessus des appuis afin de constituer un frettage complété par des barres verticales (pourcentage minimum de 0,2 % pour les armatures verticales et horizontales).

Fig. III.5.



Pratiquement on peut déterminer les armatures de traction en calculant le moment de flexion, à partir de la portée entr'-axes des appuis et en supposant :

$$Z = 0{,}6l \qquad \text{pour} \qquad \frac{l}{h} < 1$$

$$Z = 0{,}2(l + 2h) \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant \frac{l}{h} \leqslant 2$$

La section d'armatures ainsi trouvée à mi-portée devrait être constituée de barres de petits diamètres, concentrées sur une hauteur voisine de $0{,}2h$ (par rapport au parement inférieur de la poutre) et filant sur toute la longueur.

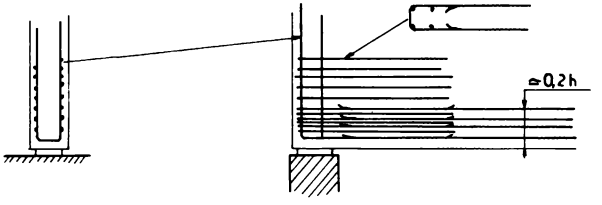


Fig. III.6.

NOTA : Il est important de vérifier que la bielle d'appui de hauteur maximale $\frac{h}{10}$ ou $\frac{l}{10}$ puisse reprendre l'effort tranchant sous contrainte autorisée et soit équilibrée dans la zone d'appui, par une section d'acier sollicitée également à la contrainte autorisée.

3. Poutres-cloisons continues

Les essais effectués sur des poutres homogènes donnent comme pour les « poutres cloisons » isostatiques, des résultats différents de ceux obtenus dans la théorie classique de la flexion simple.

On remarque en particulier que le bras de levier du couple élastique diminue très rapidement dès que le rapport de la portée à la hauteur de la poutre approche l'unité.

L'effet d'arc est, là aussi, très important et on constate une concentration des contraintes de compression au voisinage des appuis (fig. III.7).

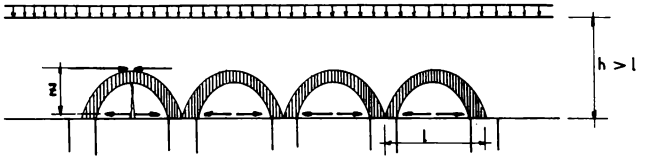


Fig. III.7.

Nous voyons ci-après la direction des contraintes dans une poutre cloison continue où $l = h$ (Fig. III.8a et III.8b) :

l'approximation, le plus souvent appliquée, consiste à retenir dans le cas de la charge uniformément répartie, par exemple :

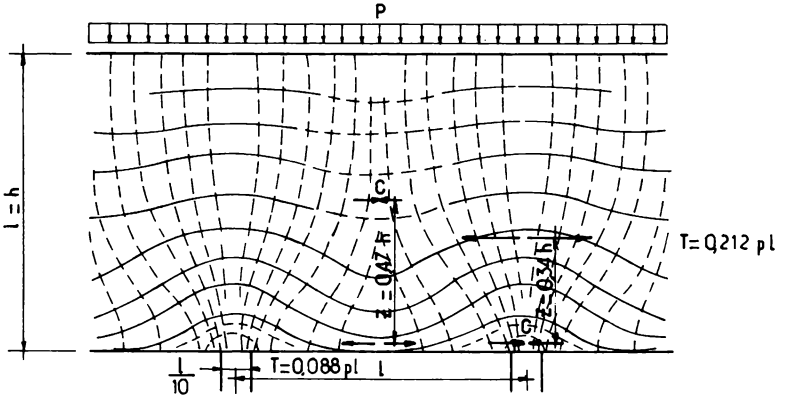


Fig. III.8*a*. Chargement uniformément réparti sur le parement supérieur

$$\frac{pl^2}{12} \quad \text{sur appuis, soit} \quad 0{,}083pl^2$$

et

$$\frac{pl^2}{24} \quad \text{en travée, soit} \quad 0{,}042pl^2$$

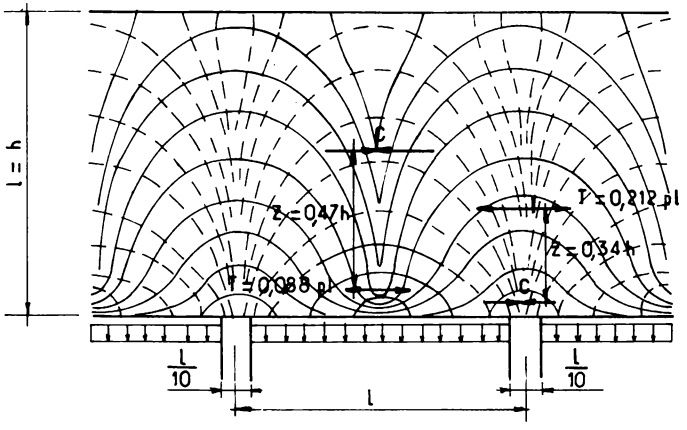


Fig. III.8*b*. Chargement uniformément réparti sur le parement inférieur

Compte tenu des résultats d'essais, on constate sur appuis que l'excédent de moment pris en compte ($0{,}083pl^2$ au lieu de $0{,}072pl^2$) compense l'erreur faite sur le bras de levier ($0{,}5h$ au lieu de $0{,}34h$)*.

Après l'apparition des fissures, il est certain que le fonctionnement des poutres en béton armé correspond à une augmentation du bras de levier, notamment en travée.

Les recommandations du C.E.B. pour la détermination du bras de levier Z aussi bien en travée que sur appui sont les suivantes :

$$Z = 0{,}2(l + 1{,}5h) \quad \text{quand} \quad 1 \leqslant \frac{l}{h} \leqslant 2{,}5$$

ou

$$Z = 0{,}5l \quad \text{quand} \quad \frac{l}{h} < 1$$

En ce qui concerne la disposition des armatures, il est recommandé de disposer toutes les armatures inférieures sur une hauteur de $0{,}2h$; par contre, les armatures supérieures nécessaires à reprendre le moment sur appui peuvent être partagées en deux parties d'égale section :

a) armatures filantes réparties sur une hauteur de $0{,}2h$ au voisinage du parement supérieur

b) armatures, centrées sur l'appui, pouvant être interrompues à $0{,}4l$ de part et d'autre de l'appui et uniformément réparties sur une bande verticale de $0{,}6h$.

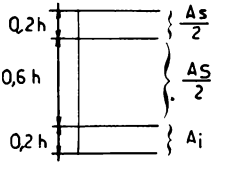


Fig. III.9.

(*) On adopte généralement une même valeur Z sur appui et en travée.

Il est certain que la zone de béton la plus comprimée se situe à l'appui où, en plus de la composante de flexion, il y a une concentration de bielles de béton.

Il est donc prudent de vérifier l'épaisseur de la « paroi poutre » en fonction de l'effort tranchant V maximum.

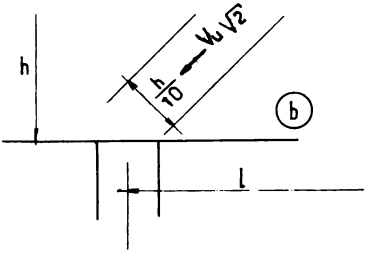


Fig. III.10.

Une vérification à l'état limite ultime dans laquelle la contrainte du béton est limitée supérieurement à $\sigma'_{b\max}$ peut nous permettre d'écrire, en supposant les bielles inclinées à $\frac{\pi}{4}$ avec une hauteur efficace de $\frac{h}{10}$

$$b \cdot \frac{h}{10}\, \sigma'_{b\max} = V_u\sqrt{2}$$

$$V_u \simeq 0{,}07bh\sigma'_{b\max}$$

Cette vérification, relative à la possibilité d'un bon fonctionnement en arc, permet de négliger la vérification des armatures d'âme comme il est recommandé de le faire dans une poutre fléchie, où $l > \frac{h}{2}$.

Il est pourtant prudent de disposer verticalement et horizontalement des armatures de petit diamètre (pourcentage 0,2 %) réparties uniformément dans les deux directions. *Au delà de l'appui,* les armatures interrompues (la moitié de A_s) devraient donc filer sur toute la longueur; quelques barres horizontales et verticales de faible longueur dans la zone de concentration des bielles permettent en outre une bonne répartition des efforts (Fig. III.11).

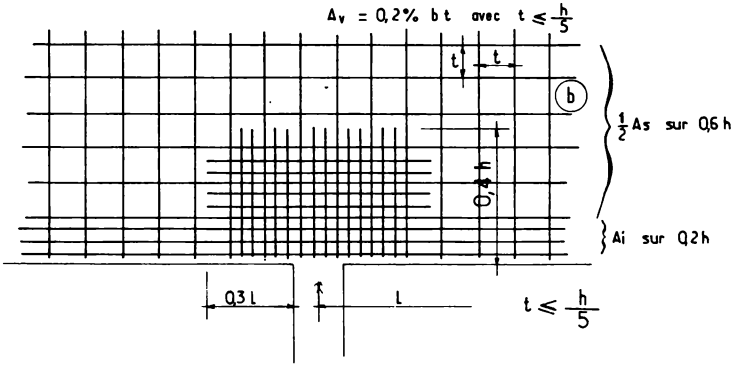


Fig. III.11.

Lorsque les charges sont disposées à la partie inférieure de la poutre cloison, les armatures verticales prévues doivent permettre, au minimum, la remontée de ces charges dans la zone comprimée.

De la même façon, lorsqu'une paroi vient prendre appui sur une poutre cloison, il faut veiller à une bonne reprise de la totalité de l'effort tranchant provenant de la paroi, en disposant par exemple un réseau de barres pliées complétées par des barres verticales si la paroi vient prendre appui au voisinage du milieu de travée de la poutre cloison, ou uniquement des barres verticales s'il en est autrement.

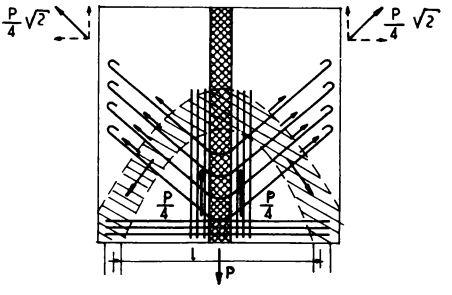


Fig. III.12.

4. Poutres cloisons supportant des charges concentrées.

Compte tenu de la faible épaisseur des poutres cloisons l'introduction de charges concentrées importantes à la partie supérieure de ces éléments impose souvent de prévoir une nervure verticale au droit de chaque charge concentrée; dans cette éventualité, le calcul des moments en travées et sur appuis est mené comme s'il s'agissait de poutres continues de hauteur relativement faible par rapport à leur portée ou plus simplement en retenant les résultats suivants :

$$\frac{2}{3} M_0 \quad \text{sur appuis}$$

$$\frac{1}{3} M_0 \quad \text{en travée}$$

M_0 est le moment isostatique de la travée considérée. Ces moments sont surévalués puisque l'effet d'arc est totalement négligé de sorte que malgré la variation du bras de levier, les sections d'armatures trouvées en adoptant

$$Z = 0{,}5h$$

ne conduisent pas à une erreur importante.

Dans le cas où aucune nervure verticale n'est prévue dans la poutre cloison, il faut :

a) prévoir une armature horizontale de répartition sous le point d'application de la charge;

b) considérer qu'avec la hauteur de la poutre il y a un étalement de la charge d'autant plus important que la distance entre le point d'application de la charge et le parement inférieur de la poutre, est grande; il est alors possible de calculer la poutre comme si elle était soumise à des charges uniformément réparties.

On peut plus simplement considérer l'équilibre de bielles à 45° grâce à des armatures horizontales uniformément distribuées sur toute la hauteur de la poutre et compléter le ferraillage par des armatures verticales au pourcentage de 0,2 %.

Dans les bâtiments à refends, on rencontre de nombreux cas de poutres cloisons liées à des voiles, formant console courte, et on s'aperçoit qu'on peut

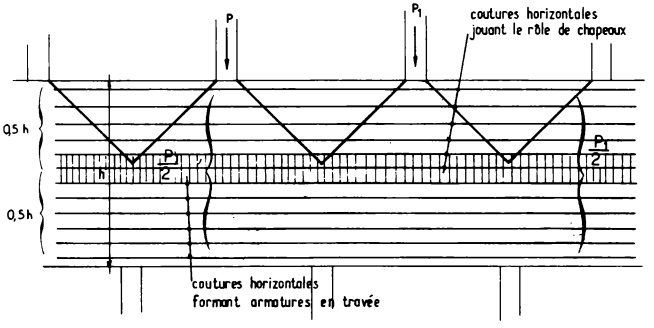


Fig. III.13.

trouver, le plus souvent, des solutions simples pour le fonctionnement de tels ensembles.

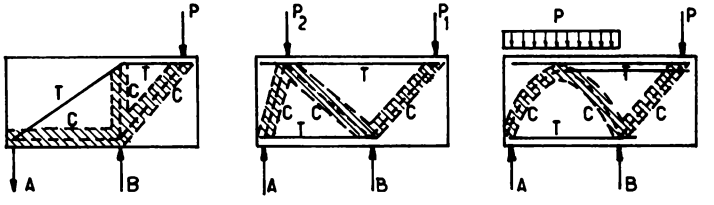


Fig. III.14.

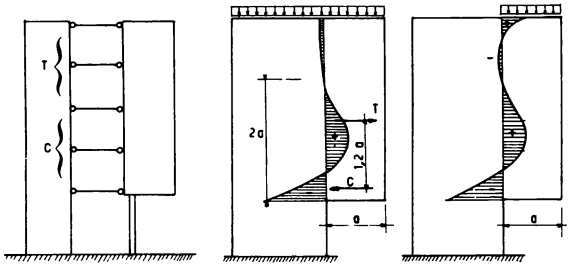


Fig. III.15.

5. Prescriptions du B.A.E.L.

Dans le B.A.E.L., on note en Annexe F.5 que toutes les formules proposées prennent en compte une portée l égale à la plus petite des deux dimensions :

l_t portée de la paroi entre axes des appuis et $1.15\ l_0$
(l_0 portée entre nus des appuis).

Sous q, charge appliquée par unité de longueur dans le calcul à l'état limite ultime, le moment de référence s'écrit,

$$M_0 = \frac{ql^2}{8}$$

alors que l'effort tranchant de référence

$$V_{ou} = \frac{ql}{2}$$

permet de définir la contrainte tangente conventionnelle

$$\tau_{ou} = \frac{V_{ou}}{b_0 h} \quad \text{si} \quad h \leqslant l$$

et

$$\tau_{ou} = \frac{V_{ou}}{b_0 l} \quad \text{si} \quad h > l$$

Dans ces dernières formules h est la hauteur de la paroi, et b_0 désigne son épaisseur dont la valeur devra répondre à la plus grande des deux conditions suivantes :

$$3{,}75 \frac{q}{f_{c28}} \frac{l}{h} \qquad \left(\text{ou } 3{,}75 \frac{q}{f_{c28}} \text{ si } h > l\right)$$

et

$$\mathbf{0{,}14}\ l \sqrt[3]{\frac{q}{f_{c28} \cdot h}}$$

la première condition limite le cisaillement et la seconde, le déversement de la paroi fléchie.

La section A des armatures principales inférieures résulte, dans le cas d'une paroi reposant sur 2 appuis, de la formule :

$$A = \frac{M_{ou} \cdot \gamma_s}{Z \cdot f_e}$$

avec

$$Z = 0{,}2(l + 2h) \quad \text{si} \quad 0{,}5 \leqslant \frac{h}{l} \leqslant 1$$

$$Z = 0{,}6l \quad \text{si} \quad h > l$$

f_e est la limite élastique de l'acier utilisé et $\gamma_s = 1{,}15$.

Dans le cas d'une paroi fléchie à plusieurs travées, le partage des moments sur appuis et en travée se fait comme pour les poutres continues par la méthode forfaitaire, en prenant pour bras de levier

$$Z = 0{,}2(l + 1{,}5h) \quad \text{si} \quad 0{,}5 \leqslant \frac{h}{l} \leqslant 1$$

$$Z = 0{,}5l \quad \text{si} \quad h > l$$

et en disposant des armatures filantes concentrées respectivement en haut et en bas de la paroi; ces deux cours d'armatures horizontales sont complétés par des armatures horizontales dont la section représente le quart de celle déterminée sur appui sans que le pourcentage puisse être inférieur à 2/1 000 pour la classe d'acier FeE 40, et 3/1 000 pour la classe FeE 22.

En indiquant, par ailleurs, la possibilité de calculer la section d'armatures verticales, le B.A.E.L. précise que ces armatures représenteront un pourcentage minimal de 2/1 000 pour la classe d'acier FeE 40 et de 3/1 000 pour la classe FeE 22.

Rappelons toutefois que pour le calcul de la contrainte tangente, l'effort tranchant à prendre en compte, dans le cas où la paroi est soumise à des charges verticales appliquées simultanément, à la partie supérieure et à la partie inférieure de la paroi, est égal à la superposition des deux efforts tranchants majorés de la **remontée de la charge appliquée à la partie inférieure.**

CHAPITRE IV

CONSOLES COURTES

Les consoles courtes sont très souvent utilisées dans les ouvrages de « Bâtiment » ou de « Travaux Publics »; elles permettent, généralement, la réalisation d'appuis libres et sont soumises le plus souvent à des charges localisées relativement importantes.

Sur une console courte, la distance d'une charge localisée au nu de la section d'encastrement de la console est toujours inférieure à sa hauteur.

Il est difficile de faire l'analyse du comportement élastique d'une console courte : il faut avoir recours à la photoélasticité.

La figure IV.1 indique les trajectoires des contraintes principales de traction et de compression dans une console courte, de forme trapézoïdale, soumise à une charge concentrée par l'intermédiaire d'un appui en néoprène **(fig. IV.1).**

On remarque que :

– la trajectoire de la contrainte principale de traction est sensiblement perpendiculaire à celle de la contrainte principale de compression,

– il y a une concentration des contraintes principales de traction à la partie supérieure de la console courte, d'une part, et une concentration des contraintes principales de compression au voisinage de son angle inférieur, d'autre part.

Lorsque ces trajectoires sont repérées sur une console courte de forme rectangulaire on s'aperçoit que l'angle inférieur (opposé à l'appui) n'est pratiquement pas sollicité car les trajectoires des contraintes principales de compression demeurent inclinées et convergent vers l'angle inférieur d'appui.

Ces quelques observations faites sur de nombreux essais peuvent nous permettre de définir un mécanisme de fonctionnement, après fissuration, d'une console courte.

Ce fonctionnement correspond à une triangulation dans laquelle la rotation du système se ferait dans la zone de concentration des contraintes principales de compression, au voisinage de l'angle inférieur d'appui, avec déplacement sensiblement horizontal des fibres supérieures de la console courte.

Cependant la simple triangulation comprenant un tirant supérieur et une bielle inclinée comprimée ne peut suffire à supprimer le risque de fissuration qui subsiste si :

– la contrainte dans l'armature du tirant est proche de la limite élastique,

– la bielle de béton est soumise à une contrainte excessive,

– des coutures ne lient pas cette bielle à la surface de contact entre la console courte et l'élément porteur proprement dit,

– la charge est située trop près de l'about de la console courte,

– une force horizontale relativement importante agit au niveau supérieur de l'élément en même temps que la charge verticale.

1. Disposition des armatures et vérifications à effectuer pour assurer l'équilibre et minimiser la fissuration

Les vérifications et le dimensionnement des armatures se font à l'état limite ultime.

Si h est la hauteur utile de la console courte, à sa racine, et si b est son épaisseur, on peut estimer en première approximation le bras de levier Z du système triangulé à :

$$Z = 0{,}85h$$

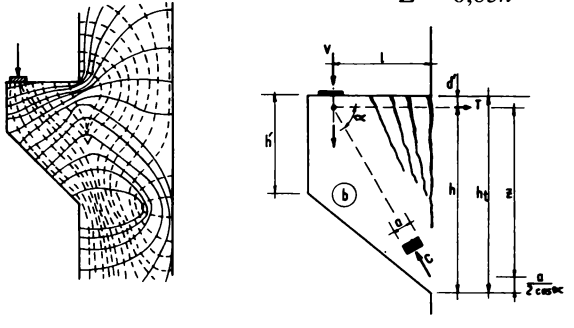


Fig. IV.1.

La résultante des contraintes de compression C, dans la bielle inclinée d'un angle α a pour valeur

$$C = \frac{0{,}85ab\sigma'_{bk}}{1{,}5} = \frac{T}{\cos\alpha} = \frac{A_T\sigma_a}{\cos\alpha} = \frac{V}{\sin\alpha}$$

σ'_{bk} est la contrainte caractéristique du béton en compression *

$\frac{0{,}85\sigma'_{bk}}{1{,}5}$ est la contrainte maximale que peut admettre la bielle à l'état limite ultime; cette limite de contrainte permet de déterminer la largeur a de la bielle.

(*) Elle est désignée par f_{c28} dans le B.A.E.L.

De la même façon σ_a $\left(\text{correspondant à } \frac{f_e}{\gamma_s}\right)$ est la contrainte maximale que peuvent admettre les armatures de section A_T (à l'état limite ultime, on a donc $T = A_T \cdot \sigma_a$).

Les égalités précédentes nous permettent de définir la valeur minimale de a :

$$a = \frac{A_T \sigma_a}{b \sigma'_b \cos \alpha} \qquad \text{avec} \qquad \sigma'_b = \frac{0.85\ \sigma'_{bk}}{1{,}5}$$

d'où

$$Z = h - \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

l'angle α est tel que $\text{tg } \alpha = \frac{Z}{l}$ alors que A_T correspond à :

$$A_T = \frac{Vl}{Z \sigma_a}$$

Il y a lieu de faire une itération pour mieux fixer la valeur de Z.

La détermination des armatures horizontales du tirant d'une part et de la contrainte dans la bielle d'autre part, ne suffisent pas pour empêcher la fissuration.

Il y a lieu de fretter la bielle inclinée avec des armatures capables, en même temps, de coudre les fissures pouvant survenir à l'intérieur du triangle constitué par l'appui, la bielle inclinée et le tirant. Ces armatures, distribuées sur les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de la console courte correspondent à une section approximativement égale au quart de la section A_T du tirant.

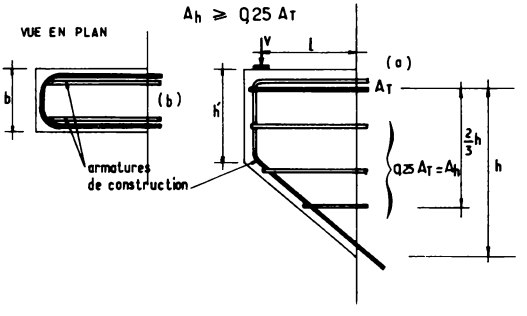


Fig. IV.2.

Toutes les armatures A_T *et* A_h bouclées horizontalement, sont convenablement ancrées au-delà de l'appui **(fig. IV.2)**

NOTA : Dans une console courte de forme trapézoïdale il est conseillé de prévoir

$$h \geqslant 2h'$$

et dans tous les cas

$$l \leqslant h$$

L'armature supérieure est renforcée dans le cas où une force horizontale H agit au niveau supérieur de la console courte; la sollicitation ultime H_u impose une section d'armature complémentaire.

$$A_H = \frac{H_u}{\sigma_a}$$

et aucune disposition particulière n'est prise si :

$$\frac{H_u}{V_u} \leqslant 0{,}2$$

Par contre, il est conseillé de souder une platine en métal sur le lit supérieur d'armatures (la platine sert au repos de l'appui en néoprène) si :

$$\frac{H_u}{V_u} > 0{,}2.$$

2. Dispositions constructives dans quelques cas particuliers

a) Cas de la double console courte soumise à deux charges concentrées égales (ferraillage conseillé fig. IV.3).

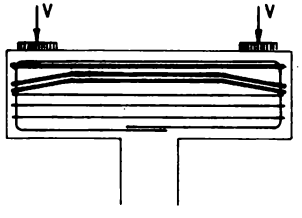


Fig. IV.3.

La légère inclinaison des deuxième et troisième lits d'armatures supérieures correspond à une meilleure butée de la bielle.

Cette disposition est de loin supérieure à celle représentée ci-dessous (fig. IV.4).

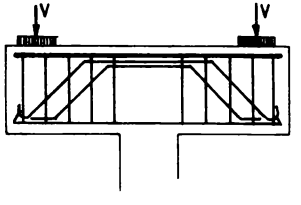


Fig. IV.4.

b) Dans le cas où la charge est appliquée à la partie inférieure de la console courte la meilleure disposition est celle de la figure IV.5.

Le tirant incliné T reprend la totalité de la charge V en tenant compte de l'angle α.

$$T = \frac{V}{\cos \alpha}$$

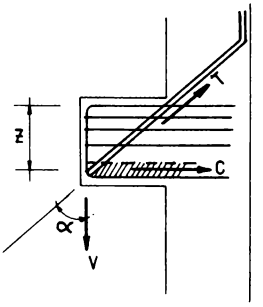


Fig. IV.5.

La bielle C est horizontale; elle est vérifiée, comme précédemment à l'état limite ultime, sous l'effort V et doit être frettée par quelques cadres verticaux.

3. Prescriptions de l'American Concrete Institute (A.C.I.)

En désignant par :

- A_T la section des armatures du tirant supérieur déterminée à partir de V_u,
- A_h la section des armatures réparties sur les $\frac{2}{3}$ de la hauteur de la console,
- A_H la section des armatures correspondant à H_u venant éventuellement s'ajouter à A_T,
- h la hauteur utile de la console d'épaisseur b,
- l la distance de la charge V_u à la racine de la console,
- ρ le pourcentage d'armatures défini par $\frac{A_T}{b \, . \, h}$.

Les conditions suivantes doivent être respectées

$$A_h \geqslant 0{,}5 A_T$$

$$0{,}04 \leqslant \rho \frac{\sigma_a}{\sigma'_b} \leqslant 0{,}13 \qquad \text{et} \qquad \frac{A_T + A_h}{bh} \leqslant 0{,}2 \frac{\sigma'_b}{\sigma_a}$$

σ_a et σ'_b sont respectivement les contraintes de calcul de l'acier et du béton à l'état limite ultime.

En appelant ρ_V le rapport $\frac{A_T + A_h}{bh}$, la contrainte de cisaillement est donnée par la formule empirique

$$V_u = 6{,}5\left(1 - \frac{l}{2h}\right)(1 + 64\rho_V)\sqrt{\sigma'_b} \text{ (psi)}$$

s'il n'y a pas de force horizontale H_u

et $$V_u = \left(6{,}5 - 5{,}1\sqrt{\frac{H_u}{V_u}}\right)\left(1 - \frac{l}{2h}\right)\left[1 + (64 + 160)\sqrt{\left(\frac{H_u}{V_u}\right)^3}\right]\rho\sqrt{\sigma'_b}\ \text{(psi)}$$

dans le cas où une force H_u agit en tête de la console,

on notera que $$\sqrt{\sigma'_b}\ \text{(psi)} = 0{,}083\sqrt{\sigma'_b}\ \text{(MPa)}$$

La contrainte de cisaillement devra être comprise entre les limites suivantes :

$$3{,}25\sqrt{\sigma'_b}\ \text{(psi)} \leqslant V_u \leqslant \begin{cases} 17{,}2\sqrt{\sigma'_b} \\ 0{,}2\sigma'_b \\ 800\ \text{psi} \end{cases}$$

la plus petite des 3 valeurs

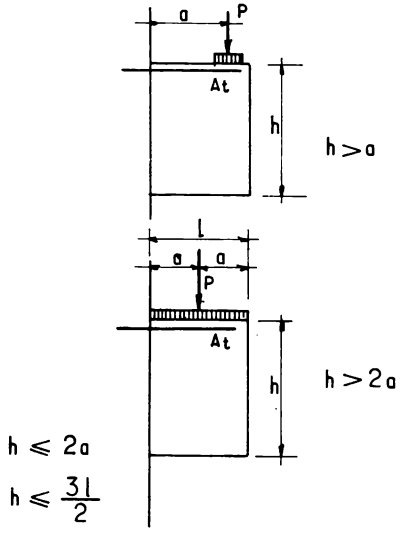
la meilleure approximation pour le pré-dimensionnement sera de considérer :

$$V_u = 10\sqrt{\sigma'_b}\ \text{(psi)} = 0{,}83\sqrt{\sigma'_b}\ \text{(MPa)}$$

4. Recommandations du Bureau Securitas (n° 139 de mai 1974)

Ces recommandations ont été établies à partir des essais effectués au Centre d'essais des structures par J. R. Robinson sur des consoles soumises à des contraintes tangentes faibles, modérées, et relativement élevées.

a) Consoles de hauteur relative réduite subissant des contraintes tangentes faibles ou modérées.



La hauteur de ces consoles doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$h \leqslant 2a$$

$$h \leqslant \frac{3l}{2}$$

a est la distance du point d'application de la résultante de la charge au nu de l'encastrement.

Fig. IV.6.

– *Consoles sans coutures*

Il faut vérifier dans ce cas, sous l'effort tranchant de service V,

$$\tau_b = \frac{V}{bZ} \leqslant \bar{\sigma}_b$$

b est l'épaisseur de la console courte

Z est le bras de levier évalué à $\frac{7}{8} h$

$\bar{\sigma}_b$ est la contrainte admissible du béton en traction (C.C.B.A. 68)

h est ici limitée supérieurement à $1{,}5a$.

La section des armatures A_t est calculée par la formule

$$A_t = \frac{M}{Z\sigma_a} = \frac{P.a}{Z.\sigma_a}$$

σ_a est la contrainte admissible de l'acier $\left(\sigma_a = \frac{2}{3}\sigma_e\right)$.

– *Consoles avec coutures* évaluées forfaitairement en fonction de $\frac{\tau_b}{\bar{\sigma}_b}$.

La contrainte tangente $\frac{V}{bZ}$ est inférieure à $3\bar{\sigma}_b$.

La section des armatures A_t est calculée par la formule

$$A_t = \frac{P.a}{Z.\sigma_a}\left[1 + 0{,}05\left(\frac{\tau_b}{\bar{\sigma}_b} - 1\right)\right]\sqrt{\frac{300}{\sigma'_j}}$$

h est ici limitée supérieurement à $(1{,}65a)$

σ'_j est la résistance nominale du béton à la compression à j jours (C.C.A.B. 68) exprimée en bars

et

$$\sqrt{\frac{300}{\sigma'_j}} \geqslant 1$$

La section des armatures de couture ΣA_c est donnée par la formule :

$$\Sigma A_c = \frac{1}{10}\frac{\tau_b}{\bar{\sigma}_b} A_t$$

Ces armatures sont, en principe, disposées en deux lits, l'un au voisinage du parement comprimé, l'autre à mi-hauteur de la console.

b) Consoles subissant des contraintes tangentes élevées et pouvant avoir une hauteur relative importante.

Le rapport $\frac{h}{a}$ est limité supérieurement à 4.

Le rapport $\frac{h}{l}$ est limité supérieurement à $\frac{5}{2}$.

La contrainte tangente $\tau_b = \dfrac{V}{bZ}$ est limitée supérieurement à $5\bar{\sigma}_b$ ou 35 bars.

La section A_t des armatures du tirant est calculée par la formule

$$A_t = \frac{P.a}{\frac{7}{8}\sigma_a h} \cdot \frac{1{,}1}{1 + 0{,}25\lambda} \sqrt{\frac{300}{\sigma'_j}}$$

dans laquelle :

h est limitée à $2a$ dans l'expression $\dfrac{7}{8}h$

$\lambda = \dfrac{1}{3}\dfrac{h}{a}$ où h est la hauteur utile réelle (pouvant être supérieure à $2a$).

La section des armatures de couture ΣA_c est déterminée par la relation :

$$\Sigma A_c = \lambda A_t$$

ces armatures sont distribuées uniformément sur une hauteur égale à $\dfrac{7}{8}h$, à partir des armatures du tirant.

NOTA : Dans la méthode exposée ci-dessus, il n'est pas fait état d'effort horizontal s'exerçant en tête des consoles. Si la face supérieure est soumise à un effort horizontal H, la section des armatures du tirant est majorée de $\dfrac{H}{\sigma_a}$. Si la contrainte tangente est élevée, on tient compte dans la limitation de la contrainte tangente d'un coefficient de réduction

$$1 - 0{,}6\frac{H}{P}$$

5. Prescription du B.A.E.L.

En désignant :

– le moment de flexion et l'effort tranchant à l'état limite ultime, dans la section d'encastrement, par M_u *et* V_u

– le rapport M_u/V_u par a

– la hauteur utile par d et le rapport $\dfrac{d}{a}$ par ρ

– la contrainte tangente $V_u/b_0 d$ par τ_u (en appelant b_0 l'épaisseur de la console et en limitant d à $4a$ dans le cas d'une charge concentrée et à $4l$ dans le cas d'une charge uniformément répartie s'étendant sur une longueur l.

Le B.A.E.L. propose :

de limiter la contrainte tangente à la plus petite des deux valeurs :

$$\tau_u = 0{,}03(2 + \rho) f_{cj}$$
$$\tau_u = 4 \text{ MPa}$$

en plafonnant f_{cj} à 30 MPa et ρ à 4

et de calculer l'aire A de la section des armatures tendues par la formule :

$$A = \frac{M_u \cdot \gamma_s}{Z \cdot f_e} \qquad \text{où} \qquad \gamma_s = 1{,}15$$

et où Z est pris égal à la plus petite des deux valeurs suivantes

$$0{,}7 h_s (1 + 0{,}1\rho)$$
$$1{,}2a(0{,}8 + 0{,}2\rho)$$

ici la hauteur h_s ne peut être supérieure à $\frac{5}{3}a$ (1ere formule) et ρ supérieur à 4 (2e formule).

Sur la hauteur de la console ces armatures sont complétées par des armatures disposées sur le parement inférieur avec une section $\frac{A}{10}$ et des armatures réparties horizontalement.

$$\Sigma A_r = \lambda A$$

où $$\lambda = \frac{1}{4}\left(\rho + \frac{12\tau_u}{f_{cj}} - 1\right) \geqslant \frac{1}{10} \quad \text{avec} \quad \rho \leqslant 4$$

Les étriers et cadres verticaux permettent éventuellement :

- de résister aux efforts de torsion
- de servir de coutures de fendage
- de remonter les charges appliquées à la partie inférieure de la console
- de maintenir en place l'ensemble des armatures horizontales.

Imprimerie BOUDIN – PARIS
Dépôt légal : 3e trimestre 1980
N° d'Éditeur : 3568

EYROLLES

CAPRA & DAVIDOVICI - **Guide pratique d'utilisation des règles B.A.E.L.** 80 - 272 p., 1980 (coll. U.T.I. (catégorie A)

CHARON - **Le calcul et la vérification des ouvrages en béton armé** - Théorie dt applications - 640 p., 1979

— **Exercices de béton armé avec leurs solutions** - 304 p., 1979

COURBON - **Voiles minces** - 208 p., 1979

— **Plaques minces élastiques** - 176 p., 1980

D.T.U. - **Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé** (C.C.B.A. 68) - 240 p., 1975 (coll. U.T.I.)

GERY & CALGARO - **Les matrices - transfert dans le calcul des structures** - 320 p., 1973

JALIL, MORISSET et PERCHAT - **Calcul du béton armé à l'état-limite ultime** - 392 p., 1976 (coll. U.T.I.)

MECHDOUDJIAN - **Cours de béton armé. Règles B.A.E.L. et C.C.B.A. 68** 144 p., 1980

TICHY et RAKOSNIK - **Calcul plastique des ossatures en béton** - 312 p., 1975

EYROLLES

6201